UNTDF

Universidad Nacional de Tierra del Fuego,
Antártida e Islas del Atlántico Sur

MATEMÁTICA

CIU 2020

ICSE

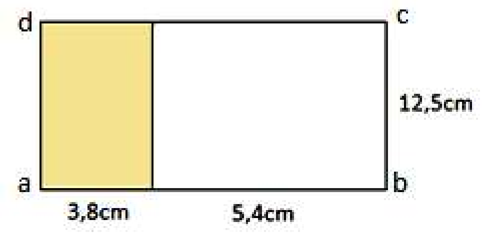
1. Controla si los resultados son correctos:
   a) $6-(-3)+(-12):(-3)+6=19$
   b) $8:(-4)+(-5).(-15):(-3)=-27$
   c) $2^4-4^2:8-2^5=-18$
   d) $\left[8-(6-4)\right]:3+\left(24-8\right):\left(16-12\right)-9:\left(5-2\right)=3$
   e) $\sqrt[3]{1-28}-32:\sqrt{4+12}+\left[\left(3-2.5+5\right)^2\right]^3=53$
   f) $-4-2.\left(5-2\right)^2+\sqrt[3]{\left(2-4\right)^3.(-1)}+(-3)^2+14:\left(2-9\right)=-13$

2. Controla si los resultados son correctos:
   $a)\frac{3}{8}.\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{11}.\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{19}{80}$; $b)\frac{5}{9}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{10}{3}.\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)=\frac{17}{36}$
   $c)\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-\frac{4}{5}.\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}:\frac{3}{7}=-\frac{19}{12}$

3. Un comprimido se compone de 20% de aspirina, 42% de vitamina C y 38% de excipiente. Si pesa 2 gramos, cuántos miligramos contiene de cada componente?

4. En un partido de básquet, Alejandro ha acertado 12 tiros al aro sobre un total de 20 intentos; Santiago ha acertado 7 tiros sobre un total de 10, y Agustín 15 sobre un total de 25. Cuál de los jugadores obtuvo el mejor porcentaje de aciertos?

5. En el rectángulo ABCD, qué porcentaje de su área total, representa el área sombreada?



6. Une con una flecha los números iguales:
   $0,2.10^3$ 20 $0,02.10$ 2.10^{-3} 2000 $0,02.10^2$ 200.10^{-5} $0,02$

   $0,2.10^2$ $0,2$ 2000.10^{-2} 20.10^2 2 200 $0,002$ 2.10^{-2}

7. Verifica los resultados de estas operaciones:

a) $\dfrac{\frac{7}{10}-\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{7}{4}}{2-\frac{1}{4}}=2$; b) $\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}=\frac{81}{4}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+3^{-2}-\frac{1}{9}.10^0=4$

d) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right).\frac{4}{5}}{\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{15}{16}\right)}-\frac{1}{2}=1$

8. Analiza cada expresión para verificar si es verdadera o falsa.

$a)\ \frac{12-3}{3}=4-1$ ..... ; $b)\ \frac{3}{12-3}=\frac{1}{4}-1$ ..... ; $c)\ \frac{1}{9+6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$ .....

$d)\ \frac{9+7}{7}=9$ ..... ; $e)\ \sqrt{4.9}=\sqrt{4}.\sqrt{9}$ ..... ; $f)\ \sqrt{64+36}=\sqrt{64}+\sqrt{36}$ .....

$g)\ \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{6}$ .....

9. Observa cada una de las expresiones:

$\frac{a+b}{b}=$ $\quad\frac{c-d}{d}=$ $\quad\frac{c+b-a}{b}=$ $\quad\frac{c}{d}-1=$ $\quad\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=$

$\frac{a}{b}+1=$ $\quad\frac{c}{b}+1-\frac{a}{b}=$ $\quad\frac{c}{b-d}=$ $\quad\frac{c}{b}-\frac{c}{d}=$ $\quad\frac{a.d}{b.c}=$

En todas ellas es $a=20,\ b=5,\ c=30,\ d=3$.

Sin hacer los cálculos, ¿puedes decir cuáles tienen igual resultado?. ¿Por qué?. Verifica lo afirmado, calculando el valor de las expresiones.

10. Escribe, en los casos posibles, cada una de las siguientes expresiones como una sola potencia:

a) $(-3)^4.(-3)^2.(-3)$ b) $(-3)^5+(-3)^2$

c) $\left[(-4)^2\right]^3$

11. Expresa como una sola potencia:

$a)\ x^2.x^5$ $\quad b)\ (-x)^2.x^5$ $\quad c)\ (-x)^2.(-x)^5$ $\quad d)\ x^5:x^{-5}$

$e)\ x^3:x^{-4}$ $\quad f)\ (-x)^3:x^5$ $\quad g)\ (-x)^3:(-x)^5$ $\quad h)\ x^{-3}:x^{-6}$

12. Escribir como radicales los siguientes números:

$4^{1/2}$; $7^{2/3}$; $9^{-1/3}$; $8^{-2/3}$

13. ¿Son ciertas las siguientes igualdades?:

$a)\left(14.2^3-6.2^3+8.2^3\right)^3=2^{21}$; $b)\dfrac{\left(10^2\right)^{-3}.\left(10^3\right)^{\frac{1}{6}}}{10^{\frac{1}{2}}.\left(10^4\right)^{-\frac{1}{2}}}=1000$; $c)\dfrac{2^3.2^{-2}.2^4}{2^{-1}.2^0.2^{-3}}=512$

14. Comprueba que:

$a)\dfrac{(1,2+1,8)^2}{1,5}-\dfrac{6}{(1,5-0,3)^2-0,24}=1$; $b)\dfrac{\left(\sqrt{0,09}+\frac{1}{2}+0,7\right)^2-\left(0,7-\frac{1}{5}\right)^2}{\frac{3}{2}-\sqrt{0,25}}=2$

15. Indica el resultado correcto:

$$x=\left[\dfrac{8^{\frac{2}{3}}-3.9^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-(3a)^0}\right]^{-2}$$

Resultados: $a)x=\dfrac{35}{9}$; $b)\ x=\dfrac{81}{1225}$; $c)\ x=\dfrac{35}{18}$; $d)\ x=\dfrac{323}{81}$; $e)x=\dfrac{18}{35}$;
f) ninguno de los anteriores

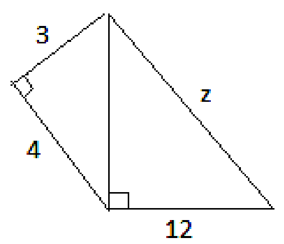
16. Indica el resultado correcto de la expresión:

$$\dfrac{64^{\frac{2}{3}}-27^{\frac{1}{3}}-1}{\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}}$$

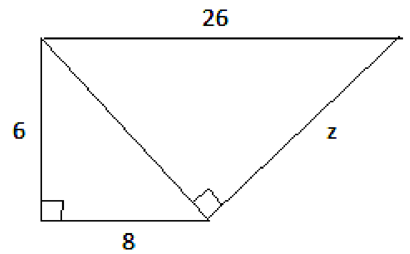
Resultados: $a)\dfrac{46}{11}$; $b)\dfrac{14}{33}$; $c)\dfrac{4}{3}$; $d)\dfrac{46}{3}$; $e)\dfrac{14}{3}$; $f)$ ninguno de los anteriores

17. Calcula el valor de z en las siguientes figuras.

a)



b)



Ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. ¿Para qué valor de x la expresión $4(2-x)+5(2x-1)-4(1+2x)$ es igual a 3?. Resuelve y comprueba el resultado obtenido.
2. ¿Para qué valor de x, la expresión $5(2x-4)-2(6-2x)$ toma los mismos valores que la expresión $9x-27$?. Resuelve y comprueba.
3. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales:

$a)\ x-9x+5=2x+3$ $\quad b)\ 2x-\frac{1}{3}x=\frac{5}{3}x$ $\quad c)\ 9x-\left(\frac{5}{4}x+1\right)12=0$

$d)\ 2x-4=\frac{x}{6}-\frac{2x-1}{9}$ $\quad e)\ \frac{1}{2}(x-3)-\frac{3(x-1)}{4}=\frac{1}{2}+x$ $\quad f)\ \frac{2x-3}{4}-\frac{x}{3}=2+x$

$g)\ 3(2-x)+1=-x+\frac{5}{2}(1-x)+\frac{x+3}{2}$ $\quad h) x+\frac{x-5}{3}+\frac{3x-4}{2}-2=\frac{x-2}{2}$

$i)\ 5-3(2x+1)=2x-4(3x-5)-2$

Determinación de una variable en términos de otras.

4. En las siguientes expresiones, despeja la variable indicada en términos de las otras variables:

$a)$ C=$\frac{5}{9}(F-32)$ despejar F ; $b) F=g.\frac{m.M}{r^2}$ despejar M

$c)\ P.V=n.R.T$ despejar R ; $d)\ P=2l+2m$ despejar m

$e)$ V= $\frac{1}{3}.\pi r^2 h$ despejar r ; $f)\ a^2+b^2=c^2$ despejar b

$g) p=-2q+120$ despejar q ; $h)$ V= $\frac{4}{3}.\pi r^3$ despejar r

Porcentaje

5. Calcula y completa:
$a)$ el 12% de 2500 es ..... ; $b)$ 600 es el ....% de 1500 ; $c)$ 200 es el 4% de.....

6. Un comerciante:
   i) compró un producto en \$4250 y quiere obtener una ganancia del 15%. ¿A cuánto deberá vender dicho producto?
   ii) compró un artículo en \$5750 y lo vendió en \$8625. ¿Qué porcentaje de ganancia obtuvo?
   iii) tiene una ganancia del 20% sobre el precio de costo de los productos que vende. Si vendió un producto en \$870, ¿cuál habrá sido el precio de costo?

7. El 20% del padrón votó al partido A, el 18% al partido B, y el 50% al partido C. Seis mil personas no votaron a ninguno de esos partidos.
   a) ¿Cuántas personas figuraban en dicho padrón?.
   b) ¿Cuántas personas votaron a cada partido?.

8. Un gremio acordó aumentos encadenados (acumulativos) de la siguiente manera: 15% en marzo, 10% en agosto y 10% en febrero. ¿Cuánto ganará un empleado después del mes de febrero si cobraba \$25000 antes del aumento?.

Números enteros

El conjunto de los números enteros, que se representa con la letra Z, está formado por la unión de los siguientes conjuntos: el de los números naturales, el de los enteros negativos y el conjunto cuyo único elemento es el cero.

$$Z = N \cup \{0\} \cup Z^-$$

$$Z = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ldots\}$$

El conjunto de los naturales se identifica con los enteros positivos Z^+, es decir es lo mismo hablar de naturales que de enteros positivos.

Números racionales

- Los números racionales son los que se pueden escribir como una fracción: $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, con $b \neq 0$.

-Un número racional se puede expresar en forma fraccionaria o decimal.

$$\underbrace{\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \ldots = \frac{25}{100}}_{\textit{forma fraccionaria}} = \underbrace{0,25 = 0,250}_{\textit{forma decimal}}$$

-Las expresiones decimales de los números racionales pueden clasificarse en:

* *expresiones decimales exactas*
* *expresiones decimales periódicas*

$0,75 = \frac{3}{4}$; $0,8 = \frac{4}{5}$; $0,625 = \frac{5}{8}$ expresiones decimales exactas

$0,\overset{\frown}{2} = \frac{2}{9}$; $0,\overset{\frown}{23} = \frac{23}{99}$; $0,2\overset{\frown}{5} = \frac{23}{90}$ expresiones decimales periódicas

Algunos ejemplos que ayudan a afianzar el concepto de número racional.

1. $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ (o, en términos de porcentaje, 40%)

2. $\frac{1}{4}\ de\ 180 = \begin{cases} \frac{1}{4}.180 \\ \frac{180}{4} \\ 180 \div 4 \end{cases}$

3. 20% *de* $180 = \frac{20}{100}.180 = \frac{1}{5}.180 = 0,20.180$

4. De 84 alumnos, 21 estuvieron ausentes, ¿cuál es el porcentaje de ausentes?.

$\frac{21}{84} = 0,25 = \frac{25}{100}$. El porcentaje de ausentes es de 25%.

Algunos ejemplos para afianzar la operatoria y propiedades de los números racionales

Analiza, los ejemplos de la 1º columna y la generalización correspondiente en la 2º columna.

$$\frac{3+4-5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots \quad \frac{a+b-c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}$$

$$\frac{8}{2+4}\neq\frac{8}{2}+\frac{8}{4} \quad \dots\dots\dots \quad \frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{4\cdot7}=\frac{15}{28} \quad \dots\dots\dots \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{3}{8}\div\frac{7}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{14} \quad \dots\dots\dots \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Potenciación

$$a^n=\underbrace{a.a.a......a}_{n\ \text{factores}} \qquad \begin{cases} a: \text{ es un número real cualquiera que se llama base} \\ n: \text{ es un número natural que se llama exponente} \\ a^n: \text{ es la potencia enésima de a} \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81}$

b) $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16$

c) $-2^4=-(2.2.2.2)=-16$

d) $10^3=10.10.10=1000$

Exponentes cero y negativos

Si a es un número real distinto de cero y n es un número entero positivo, entonces:

$$a^0=1 \quad \text{y} \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

b) $3^0=1$

c) 0^0 no está definido

d) $3^{-1}=\frac{1}{3}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

f) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

g) $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$

$h)(-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{-27}=-\frac{1}{27}$

i) $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0,001$

Propiedades de la potenciación

Sean: $a \in R$, $b \in R$, $n \in N$ y $m \in N$, se cumplen las siguientes propiedades:

I. Distributiva con respecto al producto y al cociente

$(a.b)^n = a^n.b^n$ $\qquad$ $(3.5)^4 = 3^4.5^4$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$

II. Producto y cociente de potencias de igual base, potencia de potencia.

$a^n.a^m = a^{n+m}$ $\qquad$ $2^3.2^5 = 2^{3+5}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad$ $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$

$(a^n)^m = a^{n.m}$ $\qquad$ $(3^2)^5 = 3^{2.5} = 3^{10}$

Observación: La potenciación no es distributiva con respecto a la suma ni a la diferencia:

$$\left.\begin{array}{l}(5+2)^2 = 7^2 = 49 \\ 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29\end{array}\right\} \Rightarrow (5+2)^2 \neq 5^2 + 2^2$$

$$\left.\begin{array}{l}(9-2)^2 = 7^2 = 49 \\ 9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77\end{array}\right\} \Rightarrow (9-2)^2 \neq 9^2 - 2^2$$

La potenciación con exponente racional.

Sea $a \in R$, se llama potencia de base a y exponente $\frac{1}{n}$, a la raíz enésima de a, en símbolos:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \;\; ; \forall n \in N}$$

Observación: Si n es par, debe ser: $a \geq 0$

Ejemplos:

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$ $\qquad$ $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$ $\qquad$ $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32}$

¿Por qué se impone la condición de que si n es par, debe ser $a \geq 0$?, porque:

$(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16}$ no tiene solución en R

O sea que si a<0, necesariamente n debe ser impar para que exista $\sqrt[n]{a}$

Vamos a generalizar y definir las potencias de la forma: $a^{\frac{m}{n}}$

Si utilizamos la definición anterior y las propiedades de la potenciación, vemos que:

Si $x = 8^{\frac{2}{3}} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8^2}$

Si $x = 9^{\frac{4}{3}} = \left(9^4\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{9^4}$

Podemos decir que $\forall n \in N, \forall m \in N$:

$Si\ a > 0 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$Si\ a < 0 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ solo si n es impar

Propiedades de la radicación

Si $a \in R,\ a > 0,\ b > 0,\ n \in N\ y\ m \in N,$ se cumplen las siguientes propiedades:

Distributiva respecto del producto	$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
Distributiva respecto del cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ ,\ \forall b \neq 0$
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Recordemos:

La radicación **no es distributiva** con respecto a la suma ni a la diferencia.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{64+16} = \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{64} + \sqrt{16} = 8 + 4 = 12\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{64+16} \neq \sqrt{64} + \sqrt{16}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3 \\ \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$$

Notación científica

Un número está expresado en **notación científica** cuando se escribe como el producto de dos factores:

- una potencia de 10 y
- un número mayor o igual que 1 y menor que 10. Es decir:

a x **10^{n}** siendo $1 \leq a < 10$ y **n** entero.

La notación científica es muy útil para expresar cantidades muy grandes, como el año luz (distancia que recorre la luz en un año), que es aproximadamente 9.460.800.000.000 km; o cantidades muy pequeñas, como el diámetro de un electrón, que mide aproximadamente 0,0000000000003 cm.

Ejemplos de pasaje de números en notación decimal a notación científica

Not. Decimal	$1 \leq a < 10$	n	Not. Cient.
760000000000	7,6	11	$7,6.10^{11}$
35600000000000	3,56	13	$3,56.10^{13}$
0,0000000045	4,5	-9	$4,5.10^{-9}$
0,0000000000027	2,7	-12	$2,7.10^{-12}$

Clasificación de los números

Nos hemos referido a los números racionales e hicimos hincapié en sus distintas representaciones de tipo simbólico, como las notaciones fraccionaria, decimal y porcentual. Por otro lado, también trabajamos, en el práctico 1, con números que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, por ejemplo $\sqrt{2} = 1,414213562...$, que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Estos números son los números irracionales. Algunos tipos de números irracionales, lo constituyen:

- las raíces cuadradas de números naturales que no den por resultado otro número natural, por ejemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7},..$
- los resultados de operar $(+,-,\times,\div)$un número irracional con otro racional, por ejemplo: $1+\sqrt{2}$, $\dfrac{3+\sqrt{6}}{5}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{4}{5+\sqrt{3}},..$

- los números: $\pi = 3,141592654...$; $e = 2,718281..$; el "número de oro", que se designa con la letra griega $\phi = 1,61803...$ (Fi). Este número, que también se puede expresar como $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,es solución de la ecuación de segundo grado: $x^2 - x - 1 = 0$.

Para clarificar lo dicho, recurrimos al siguiente cuadro:

Clasificación de los números reales

$$\text{REALES}\begin{cases}\text{RACIONALES}\begin{cases}\text{ENTEROS}\begin{cases}\text{ENTEROS POSITIVOS O NATURALES} & (1;5;100;324;\ldots)\\ \{0\} & \\ \text{ENTEROS NEGATIVOS} & (-12;-54;-120;\ldots)\end{cases}\\ \\ \text{FRACCIONARIOS} \quad (0{,}24;\frac{3}{4};1{,}\overset{\frown}{45};-\frac{8}{7};\ldots)\end{cases}\\ \\ \text{IRRACIONALES} \quad (\sqrt{2};-\sqrt{3};\sqrt[3]{7};\pi;\ldots)\end{cases}$$

Qué ocurre si tenemos que resolver la ecuación $x^2-4x+13=0$. Vemos que al aplicar la fórmula para resolverla, obtenemos $x=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$. Como dentro de los números Reales *no está permitida la operación radicación de índice par de un número negativo*, entonces al definirse la unidad imaginaria como $i=\sqrt{-1}$, la expresión anterior puede escribirse $x=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{36}\sqrt{-1}}{2}=\dfrac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$. Estos números se llaman, números complejos.

Son números de la forma $a+bi$, donde $a\ y\ b$ son reales. Los números reales resultan incluidos dentro de los números complejos, podemos ampliar entonces la clasificación anterior y escribir

$$\text{Complejos}\begin{cases}\text{Reales}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Empecemos con un ejemplo. La suma de las edades de Julia y Sofía es 26 años y, esta última tiene 8 años menos que Julia. ¿Cuáles son sus edades?

Si representamos con x la edad de Julia, y con $x-8$ la edad de Sofía, la expresión que resulta es:

$x+x-8=26$, que se puede escribir $2x-8=26$

Esta expresión es una ecuación lineal donde x es la incógnita. La solución de esta ecuación es el valor de x que verifica la igualdad. En este caso la solución es 17, ya que si reemplazamos este valor en dicha ecuación, ésta se transforma en una identidad numérica. Es decir: 2.17-8=26

Resolver una ecuación significa determinar si tiene solución, y en tal caso hallar dicha solución. Para poder resolver una ecuación se hace uso de algunas propiedades de la aritmética.

Analicemos primero estas ecuaciones:

$$4x-5=91$$
$$2x+2=50$$
$$12x-15=273$$

Estas tres ecuaciones tienen a $x=24$ como solución. **Como las tres ecuaciones tienen la misma solución, se llaman equivalentes.**

La noción de ecuaciones equivalentes es de suma importancia para resolver ecuaciones, porque cuando la resolución de una ecuación es complicada, se busca otra ecuación equivalente a la dada cuya resolución sea mucho más sencilla.

Transformación de ecuaciones en otras equivalentes

- **Si en cada miembro de una ecuación se suma un mismo número real o una expresión algebraica entera, se obtiene una nueva ecuación equivalente a la dada.**
- **Si cada miembro de una ecuación se multiplica por un mismo número real, se obtiene una nueva ecuación equivalente a la dada.**

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $2x+2=50$

Si sumamos en ambos miembros -2, se obtiene $2x+2+(-2)=50+(-2) \Rightarrow 2x=48$.

Si multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{2}$ (que es equivalente a dividir por 2), se obtiene

$\frac{1}{2}.2x=\frac{1}{2}.48 \Rightarrow x=24$.

Es decir, $x=24$ es la solución de la ecuación dada.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $4x-5=91$.

Si sumamos en ambos miembros 5, se obtiene $4x-5+5=91+5 \Rightarrow 4x=96$.

Si multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{4}$ (que es equivalente a dividir por 4), se obtiene

$\frac{1}{4}.4x=\frac{1}{4}.96 \Rightarrow x=24$.

Su solución es $x=24$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $8x+5=3x-2$

Sumando -5 (o restando 5) en los dos miembros, resulta:

$$8x+5+(-5)=3x-2+(-5)$$

$$8x=3x-7$$

Restando la expresión $3x$, en ambos miembros:

$$8x-3x=3x-3x-7$$

$$5x=-7$$

Dividiendo ambos miembros por 5 o multiplicando por $\frac{1}{5}$, resulta: $x=-\frac{7}{5}$

Esta solución se puede expresar: $S=\left\{-\frac{7}{5}\right\}$

Es conveniente comprobar si el resultado es correcto, para lo cual, se reemplaza la x por el valor $-\frac{7}{5}$ en la ecuación original, y debe obtenerse una igualdad.

$$8.\left(-\frac{7}{5}\right)+5=3.\left(-\frac{7}{5}\right)-2$$

$$-\frac{56}{5}+5=-\frac{21}{5}-2$$

$$\frac{-56+25}{5}=\frac{-21-10}{5}$$

$$-\frac{31}{5}=-\frac{31}{5}$$

Cabe preguntarse si las ecuaciones de primer grado con una incógnita, siempre tienen una única solución.

Ejemplo 4: Resolver la ecuación: $\frac{5}{3}(x+1)+\frac{4}{3}x=3x+\frac{1}{4}$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}x=3x+\frac{1}{4}$$

Agrupamos los términos donde figura la incógnita:

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right)x+\frac{5}{3}=3x+\frac{1}{4}$$

$$3x+\frac{5}{3}=3x+\frac{1}{4} \qquad (*)$$

Restamos $3x$ en ambos miembros:

$$\frac{5}{3}=\frac{1}{4}$$

Esto es falso, por lo tanto se concluye que la **ecuación no tiene solución.**
También se podría pensar de esta manera, si en la ecuación (*) se restan en ambos miembros $3x$ y $\frac{5}{3}$, se obtiene:

$$0x=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}$$

$$0x=-\frac{17}{12}$$

Esta igualdad no se verifica para ningún valor de x, porque no hay valor de x que multiplicado por 0 de por resultado $-\frac{17}{12}$.

Ejemplo 5: Resolver la ecuación: $4x+3+9x-4=13x-1$

Agrupamos los términos donde figura la incógnita:

$$13x-1=13x-1$$

Esta igualdad se verifica para cualquier valor de x, por lo tanto la ecuación tiene **infinitas soluciones.**
También se podría pensar de esta manera, si se resta en ambos miembros $13x$, y se suma 1 en cada miembro, se obtiene:

$$0x=0$$

Esta expresión se verifica para cualquier valor de x .

Resumiendo:

> Las ecuaciones lineales en una variable se pueden expresar en la forma general $ax = b$, donde a es el coeficiente de la incógnita y b es el término independiente
>
> **Sólo si** $a \neq 0$, existe una única solución de la ecuación, y está dada por $x = \frac{b}{a}$.
>
> **Si** $a = 0$, se presentan dos posibilidades: $\begin{cases} b \neq 0 & \text{No existe solucion} \\ b = 0 & \text{Existen infinitas soluciones} \end{cases}$

Porcentaje

Ejemplo 6

Un comerciante tiene una ganancia de 25% sobre el precio de costo de los productos que vende.

a) Si el producto A le costó \$3520, ¿a cuánto deberá venderlo para obtener dicha ganancia?

b) Si vendió el producto B a \$2750, ¿cuál habrá sido el precio de costo?

Primero vamos a interpretar qué significa tener una ganancia del 25%. Significa que por cada \$100 se ganan \$25. Y lo expresamos así:

$$25\% = \frac{25}{100}$$

Pero decir 25 de cada 100, es lo mismo que decir 1 de cada 4. Con lo cual:

$$\boxed{25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25}$$

Es claro entonces, que para hallar el 25% de una cantidad, por ejemplo el 25% de \$3520, se debe resolver:

$$\left(\frac{25}{100}\right)\$3520 = 0,25.\$3520 = \$880$$

> La forma más sencilla para hallar el tanto por ciento de una cantidad, es expresar el tanto por ciento en forma decimal y multiplicarlo por dicha cantidad.

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema planteado anteriormente.

a) ¿Cómo calculamos el valor de venta del producto A sabiendo que se quiere obtener una ganancia del 25%?.

Para resolver planteamos la siguiente ecuación:

$$3520 + 0,25.3520 = x$$

Resolviendo las cuentas resulta: $x = \$4400$

El producto se debe vender a \$ 4400.

b) Vamos a calcular ahora el precio de costo, sabiendo que lo vendió a \$2750. Para resolver esta situación suponemos que x es el precio de costo, entonces planteamos:

$$x+25\%\,x=2750$$

O sea que: $x+0,25\,x=2750$

Sacando factor común x, resulta: $x(1+0,25)\ =2750$

Despejando el valor de $x=\dfrac{2750}{1,25}$ y efectuando los cálculos correspondientes, obtenemos: $x=2200$.

El precio de costo del producto es: $\$2200$.

Ejemplo 7

El precio de costo de un artículo es \$1430 y el precio de venta es \$1980. ¿Cuál es la variación porcentual de aumento?

Planteamos la siguiente ecuación:

$$1430+x\%1430=1980$$

Sacando factor común \$1430, resulta:

$$1430(1+x\%)=1980$$

O sea que:

$$1+x\% = \frac{1980}{1430}$$

De donde resulta que: $x\% = \dfrac{1980}{1430}-1$

Es decir: $x\% = \dfrac{1980-1430}{1430}=0,20 \qquad \left(V.porcentual=\dfrac{V.final\text{ -}V.inicial}{V.inicial}\right)=x\%$

Coeficientes de aumento y de disminución

Ejemplo 8

En muchas oportunidades habrás escuchado frases de este tipo:

" Si abona el pasaje en tres cuotas se le recarga un 12%"

"*Hoy sobre todas las compras de más de \$2000 recibe un descuento del 12%*",

a) ¿cómo podemos expresar dicho enunciado en lenguaje simbólico?, si llamamos x al precio del pasaje, podemos expresar que C_1 (el precio del pasaje incrementado en un 12%), será:

$C_1 = x + 12\%x = x + \frac{12}{100}x = x + 0,12.x = x(1+0,12) = x\ 1,12 \Rightarrow 1,12$ este último número se llama **coeficiente de aumento.**

Por ejemplo, si el pasaje cuesta \$1500, y al pagarlo en tres cuotas nos recargan un 12%, deberemos pagar $\$1500(1,12) = \$1680$

b) En el segundo caso, el precio de la compra recibe una rebaja del 12%, entonces:

si llamamos x al monto de la compra, podemos expresar que C_0 (el precio de la compra rebajado en un 12%), será:

$C_0 = x - 12\%x = x - \frac{12}{100}x = x(1-0,12) = x(0,88) \Rightarrow 0,88$ este último número se llama **coeficiente de disminución.**

Por ejemplo, si hacemos una compra de \$2500, con el descuento del 12%, pagaremos \$2200.

Es decir que:

Para hallar aumentos o disminuciones porcentuales, se multiplica la cantidad inicial por el coeficiente de variación (de aumento o disminución)

Encadenamiento de aumentos o disminuciones porcentuales

¿Qué pasará cuando se "encadenan" los porcentajes de aumentos o disminuciones?

Vamos a suponer que una cantidad C se incrementa primero en un 12% y luego en un 18%. ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a la variación porcentual total?

Partimos de sumar el 12% de C, a la cantidad inicial C.

$$C + \frac{12}{100}C = C(1,12)$$

Luego sumamos a esta cantidad incrementada: $C(1,12)$, el 18% de la misma, con lo cual, resulta:

$$C(1,12) + \frac{18}{100}C(1,12)$$

Sacando factor común: $C(1,12)$ resulta:

$$C(1,12)(1+0,18) = C(1,12)(1,18) = \boxed{1,3216\ C}$$

Podemos concluir que cuando se aplican dos aumentos porcentuales sucesivos a una cantidad, el valor final resulta de multiplicar los coeficientes de aumento por el capital inicial.

Se procede de la misma forma cuando se encadenan disminuciones porcentuales, sólo que multiplicando el capital inicial por los coeficientes de disminución.