UNTDF

Universidad Nacional de Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur

MATEMÁTICA

CIU 2020

IDEI

Resolviendo problemas y recordando propiedades de las operaciones.

1. Un auto avanza a 30 metros cada segundo y otro avanza en el mismo sentido, 20 metros cada segundo. Parten del mismo lugar y al mismo tiempo.
   Al cabo de una hora, ¿cuántos kilómetros hizo el primero más que el segundo?. Señale la respuesta correcta, indicando su planteo.

   a) 10km   b) 36 km   c) 60km   d) 180 km

2. Se realizó la siguiente tabla para estudiar el rendimiento de un equipo de fútbol a lo largo de un campeonato. En la primera fila figuran la cantidad de goles, y en la otra fila, en cuántos partidos hicieron esa cantidad de goles.

Goles	0	1	2	3	4	7
Partidos	3	6	5	3	2	1

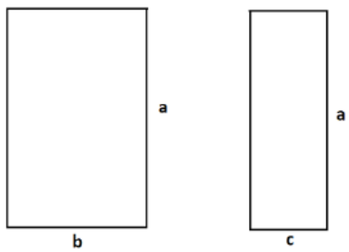
   ¿Cuál es el promedio de goles de todos los partidos?
   $a) 3,3$ $b)\ 3,4$ $c)\ 2$ $d)\ 20$

3. Juan debe pintar el interior y exterior del tanque australiano de su quinta. Tiene una profundidad de 1,20 metros, está enterrado hasta la mitad y mide 8 metros de diámetro. Sabe que con un litro de pintura puede pintar 10 metros cuadrados. ¿Cuál es la medida de la superficie que tiene que pintar?. ¿Cuántos litros de pintura necesita?. ¿Cuánto gastará si la pintura cuesta $230 el litro y viene fraccionada en latas de 4 litros y 2 litros?

4. Un pasillo de 8,60 m de largo y 2,40 m de ancho, se ha embaldosado con cerámicos cuadrados de la mayor dimensión posible sin necesidad de cortar ninguna de ellas. ¿Cuál es la dimensión de los cerámicos?. ¿Cuántos se emplearon?

5. Un depósito sin ventanas, tiene 4,2 metros de ancho, 4,5 metros de largo y 2,8 metros de alto. Sabiendo que con un litro de pintura se pintan 10 metros cuadrados de pared, ¿cuánta pintura se necesita para pintar dichas paredes?

6. Observa estos rectángulos, que tienen la misma altura **a.**

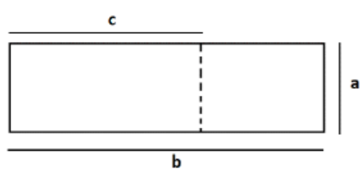


Completa la siguiente tabla. Los datos están dados en centímetros.

a	b	c	ba	ca	ba+ca	(b+c)a
1,5	0,8	0,4				
2,6	1,3	0,6				

Cuando calculaste, ba+ca, ¿qué estás calculando con respecto a los rectángulos dados?, ¿y cuando resolviste (b+c)a?. Realiza un gráfico que represente este último cálculo.

7. Observa esta figura:



Completa la siguiente tabla. Los datos, dados en cm, corresponden a las medidas de los distintos rectángulos.

a	b	c	ab	ac	ab-ac	a(b-c)
1,5	5,5	3,5				
2,3	6,5	4,2				

Si has hecho bien los cálculos, los resultados de las dos últimas columnas deben ser iguales. Algebraicamente, cuál es la propiedad involucrada?.
Teniendo en cuenta la figura, qué representan los valores obtenido en estas columnas: ab-ac y a.(b-c)?

8. Expresa cada uno de los siguientes porcentajes como números decimales:
$a)\ 4\%$ $\quad b)\ 10\%$ $\quad c)\ 53\%$ $\quad d)\ 154{,}3\%$

9. Halla:
$a)\ 8\%\ de\ 524$ $\quad b)\ 120\%\ de\ 800$ $\quad c)\ 32{,}5\%\ de\ 32840$
$d)\ 25{,}4\ \%\ de\ 8450$ $\quad e)\ 3\%\ de\ 5\%\ de\ 24000$ $\quad f)\ 10\%\ de\ 20\%\ de\ 300000$

10. Nicolás cobró el mes pasado \$58000. Este mes le aumentaron un 12%. ¿Cuál es su sueldo actual?

11. Un local comercial anuncia un 20% de descuento en toda su mercadería. ¿Cuánto se deberá pagar un artículo que cuesta \$12500?

12. Una escuela presentó un informe sobre los resultados de una prueba tomada en tres secciones de quinto grado:

	Rindieron	Aprobaron
5to A	24	75%
5to B	30	80%
5to C	35	60%

¿Qué porcentaje de los 89 alumnos de 5to grado aprobó el examen?

13. ¿Qué tanto por ciento es:
$a)\ 30\ de\ 60?$ $b)\ 60\ de\ 30?$ $c)\ 620\ de\ 28?$

14. Controla si los siguientes resultados son correctos:
$$a)\ [8-(6-4)]:3+(24-8):(16-12)-18:(9-3)=3$$
$$b)\ 3(-5)-(9-12)-[(-3)(-4)+(-7)]=-17$$
$$c)\ \sqrt[3]{1-28}-32:\sqrt{4+12}+\left[(3-2.5+5)^2\right]^3=53$$
$$d)-4-2.(5-2)^2+\sqrt[3]{(2-4)^3.(-1)}+(-3)^2+14:(2-9)=-145$$

15. Analiza cada expresión para verificar si es verdadera o falsa. Si es falsa, escribe el resultado correcto.
$a)\dfrac{12-3}{3}=4-1$ ..... ; $b)\dfrac{3}{12-3}=\dfrac{1}{4}-1$ ..... ; $c)\dfrac{1}{9+6}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{6}$ .....
$d)\dfrac{9+7}{7}=9$ ....

16. Observa cada una de las expresiones:

$$\frac{a+b}{b}= \qquad \frac{c-d}{d}= \qquad \frac{c+b-a}{b}= \qquad \frac{c}{d}-1=$$
$$\frac{a}{b}+1= \qquad \frac{c}{b}+1-\frac{a}{b}= \qquad \frac{c}{b-d}= \qquad \frac{c}{b}-\frac{c}{d}=$$

¿Puedes anticipar cuáles tienen igual resultado?.
Verifica lo afirmado, reemplazando las letras por los siguientes valores:
$a = 20,\ b = 5,\ c = 30,\ d = 3$

17. Controla si los resultados son correctos. Resuelve con lápiz y papel y luego comprueba con la calculadora.

$a)\frac{3}{8}.\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{11}.\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{19}{80}$; $b)\frac{5}{9}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{10}{3}.\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)=\frac{17}{36}$

$c)\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-\frac{4}{5}.\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}:\frac{3}{7}=-\frac{19}{12}$

18. Indica cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles son falsas. En este último caso, escribe la respuesta correcta:

$a)\sqrt{1-\frac{16}{25}}=1-\frac{4}{5}$ $\quad b)\ \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4}$ $\quad c)\ \sqrt{9+16}=3+4$ $\quad d)2\sqrt{2}.3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$e)\sqrt[3]{64ab^3}=4b\sqrt[3]{a}$ $\quad f)\sqrt{\frac{x^4y}{27}}=\frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{y}{3}}$ $\quad g)\sqrt[4]{16a^2b^4}=2b\sqrt{ab}$

$h)(2+7)^2=2^2+7^2$

19. Verifica los resultados de estas operaciones. Resuelve con lápiz y papel. Comprueba con la calculadora.

$\text{a)}\frac{\frac{7}{10}-\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{7}{4}}{2-\frac{1}{4}}=2$; $\text{b)}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}=\frac{81}{4}$; $\text{c)}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+3^{-2}-\frac{1}{9}.10^0=4$

$\text{d)}\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right).\frac{4}{5}}{\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{15}{16}\right)}-\frac{1}{2}=1$

20. En un viaje, Pedro se traslada 800 km. La cuarta parte del viaje lo realiza en ómnibus. Las tres quintas partes del resto lo hace en avión y lo que queda en tren. ¿Cuántos kilómetros anduvo Pedro en tren?

$a)120km$ $\quad b)\ 240km$ $\quad c)\ 320km$ $\quad d)\ 360km$ $\quad e)\ 480km$

21. Dos terrenos rectangulares que tienen igual perímetro, están en venta. El primero tiene 8,66m de frente por 32m de fondo. El segundo tiene 10m de frente.

Si un metro cuadrado cuesta $5000, ¿cuál es el precio de venta del segundo terreno?

Revisando las propiedades de la potenciación.

22. Expresa como una sola potencia:

$a) x^2.x^5 \qquad b)(-x)^2.x^5 \qquad c)\ (-x)^2.(-x)^5 \qquad d)\ x^5 : x^{-5}$

$e) x^3 : x^{-4} \qquad f)(-x)^3 : x^5 \qquad g)\ (-x)^3 : (-x)^5 \qquad h)\ x^{-3} : x^{-6}$

$i)(-3)^4.(-3)^2.(-3) \qquad j)\ \left[(-4)^2\right]^3$

23. En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar las propiedades. Se propone indicar cuáles son y corregirlos:

$a)\left(2^2.2^{-3}.2^5\right)^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^{16} \qquad b)\left(5^2\right)^4 : \left(5^{-3}\right)^2 = 5^8 : 5^{-6} = 1^{14} = 1$

$c)\dfrac{7^4.\left(7^2\right)^6}{\left(7^9\right)^2} = \dfrac{7^4.7^{12}}{7^{18}} = 7^{-2} = (-7)^2 = 49$

24. Expresa en forma de radical las siguientes potencias.

$a) 2^{\frac{1}{2}} \qquad b)\ 3^{\frac{2}{3}} \qquad c)\ 2^{-\frac{3}{2}} \qquad d)\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$

25. Indica V ó F

$a)\ 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{7}{10}} \quad , \quad \text{b)}\ 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}} \quad , \quad \text{c)}\ 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{7}}$

$d)\ 7^{-2} = (-7)^2 \quad , \quad e)\ 7^{-2} = 7^{\frac{1}{2}} \quad , \quad f)\ 7^{-2} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^2$

26. ¿Son ciertas las siguientes igualdades?.

$a)\left(14.2^3 - 6.2^3 + 8.2^3\right)^3 = 2^{21} \qquad b)\dfrac{\left(10^2\right)^{-3}.\left(10^3\right)^2}{10^4.\left(10^4\right)^{-2}} = 10^4 \qquad c)\dfrac{2.10^3.3,012.10^{-5}}{5,02.10^4} = 1,2.10^{-2}$

27. Aplica las propiedades de la potenciación y comprueba que:

$a)\ \left(3.3^{n+1} + 3^{n+2}\right)^3 : \left(3^{n+2}\right)^3 = 8$

$b)\left(10.2^{n+1}\right)^3 : \left(2^{n+1}\right)^3 = 1000$

$c) 2^{2-n}.\left(2.2^{n+1} + 2^{n+2}\right) = 32$

28. El valor de: $\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ es:

a) negativo ; b) menor que 14 ; c) igual a 14 ; d) mayor que 14

e) no puede responderse si no se conoce un valor aproximado de $\sqrt{3}$

29. Indica el resultado correcto:

$$x=\left[\frac{8^{\frac{2}{3}}-3.9^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-(3a)^0}\right]^{-2}$$

Resultados:

$a)x=\dfrac{35}{9}$; $b)\ x=\dfrac{81}{1225}$; $c)\ x=\dfrac{35}{18}$; $d)\ x=\dfrac{323}{81}$; $e)x=\dfrac{18}{35}$; $f)$ ninguno de los anteriores

30. Indica el resultado correcto de la expresión:

$$\frac{64^{\frac{2}{3}}-27^{\frac{1}{3}}-1}{\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}}$$

Resultados: $a)\dfrac{46}{11}$; $b)\dfrac{14}{33}$; $c)\dfrac{4}{3}$; $d)\dfrac{46}{3}$; $e)\dfrac{14}{3}$; *f*) ninguno de los anteriores

31. Indica el resultado correcto de I y II:

I) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Resultados: $a)\dfrac{1}{19}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$; $b)\dfrac{1}{18}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$; $c)\dfrac{1}{9}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$; *d*) ninguno de los anteriores

II) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)^2$

Resultados: $a)2$; $b)\ 26$; $c)\ -2$; *d*) ninguno de los anteriores

Repasando notación científica

Un número está expresado en **notación científica** cuando se escribe como el producto de dos factores: una potencia de 10 y un número mayor o igual que 1 y menor que 10. Es decir:
a x **10ⁿ** siendo $1 \leq a < 10$ y **n** entero.

La notación científica es muy útil para expresar cantidades muy grandes como el año luz (distancia que recorre la luz en un año), que es aproximadamente 9.460.800.000.000 km; o cantidades muy pequeñas como el diámetro de un electrón que mide aproximadamente: 0.0000000000003 cm.
Ejemplos de pasaje de números en notación decimal a notación científica

Not. Decimal	$1 \leq a < 10$	n	Not. Cient.
760000000000	7,6	11	$7,6.10^{11}$
35600000000000	3,56	13	$3,56.10^{13}$
0,0000000045	4,5	-9	$4,5.10^{-9}$
0,0000000000027	2,7	-12	$2,7.10^{-12}$

32.Expresa cada número en notación científica.
a) 456.000.000 b) 8.200.000.000.000
c) 0,00000004567 d) 0,0000000018

33. Escribe cada uno de estos números en notación decimal.
$a)\ 1,756\ .\ 10^{6}$ $b)\ 6,08\ .\ 10^{-7}$ $c)\ 7,26\ .\ 10^{-4}$ $d)\ 3,7\ .\ 10^{7}$

34.
Siendo: $a = 3,2.10^{7}$, $b = 5,28.\ 10^{4}$, $c = 2,01.\ 10^{5}$
Resuelve la siguiente expresión, dando el resultado en notación científica.:
$$\frac{b+c}{a}$$

35. Utiliza la notación científica, las propiedades de la potenciación y la calculadora, para resolver las siguientes operaciones. Expresa el resultado en notación científica.
$a)\ 3,5.10^{8}.\ 2,709.10^{-13}$ b) $20,3\ .\ 10^{5}\ .\ 7,5\ .\ 10^{4}$ c) $\dfrac{54.\ 2,5.10^{14}}{0,0000000025}$

36. La luz que viaja aproximadamente a 3×10^{5} km por segundo, tarda aproximadamente 5×10^{2}segundos en llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia aproximada, en notación científica, del Sol a la Tierra?. (Recordar: velocidad=espacio/tiempo)

37. Si una persona tiene 5 litros de sangre y aproximadamente 4500000 glóbulos rojos en cada milímetro cúbico de la sangre. Calcula en notación científica su número aproximado de glóbulos rojos. (Recordar: $1\ litro \equiv 1\ dm^{3}$)

Traduciendo al lenguaje simbólico y resolviendo ecuaciones de primer grado

1. Completa el cuadro con las expresiones algebraicas correspondientes a cada enunciado y anota qué simboliza cada letra utilizada, en la columna Notación:

LENGUAJE		
COLOQUIAL	SIMBÓLICO	
	EXPRESIÓN	NOTACIÓN
El precio de 20kg de pan		
La longitud de la circunferencia		
El área del círculo		
El duplo del cubo de un número		
El cubo del duplo de un número		
El perímetro de un cuadrado más su área		
Un número sumado a su décima parte		
El triple del consecutivo de un número		
La suma de $400 más el costo de 3 cafés.		
El costo de 5 gaseosas y de 3 panchos es de $1050		
El producto entre dos pares consecutivos		

2. Juan tiene 5 remeras menos que María, y Clara tiene 3 veces más remeras que Juan. Si María tiene n remeras, ¿cuál de estas expresiones representa el número de remeras que tiene Clara?

   $a) 5-3n \qquad b)\ n-5 \qquad c)\ 3n-5 \qquad d)\ 3(n-5)$

3. Adivina la fecha de cumpleaños de un compañero. Pedile que siga estos pasos y al final de ellos, estará la fecha de su cumpleaños.

   $\underset{dia}{\_\,\_}\ \underset{mes}{\_\,\_}$

   - Escribe en un papel, el número que corresponde a tu día de cumpleaños.
   - Multiplicalo por 10.
   - Al resultado súmale 5.
   - Vuelve a multiplicar todo por 10.

- Al número obtenido, súmale el número del mes en que naciste.
- Al resultado restale 50.
- ¿Qué número obtuviste?

Justifica por qué haciendo estas cuentas obtienes la fecha de su cumpleaños. Traduce al lenguaje simbólico.

4. Encuentra un número que disminuido en tres unidades de por resultado la mitad de dicho número.

5. Halla, si existe, un número natural tal que, al sumarle su doble y su cuarta parte, de por resultado 52.

6. a) Halla, si existen, dos números enteros consecutivos, tales que sumen 52.
   b) Halla, si existen, dos números impares consecutivos, que sumen 52.

7. Halla un número, tal que, al restarle su mitad y luego su tercera parte, se obtiene como resultado el número 7. Comprueba el resultado.

8. Una barra de acero de 75cm de longitud se corta en dos pedazos, uno de ellos 12 cm más corto que el otro. Halla la longitud de cada pieza.

9. ¿Qué número verifica que, sumándole 9, y luego multiplicando el resultado por 2, y luego dividiendo todo por 8 y sumándole 6 veces ese número, se obtenga -4?. Comprobar el resultado.

10. Halla, si existe, un valor de x para el cual, la siguiente expresión es igual a 3.
    $$4(2-x)+5(2x-1)-3(1+2x)$$

11. Analiza las soluciones de las siguientes ecuaciones.
    $a)\ 4(x-6)+8x=12$ $\qquad b)\ 3(x+1)-x=2x+10$ $\qquad c)\ 4x=4(x+1)-4$

12. Resuelve las ecuaciones:
    $a)\ 4x+\frac{1}{2}x=27$ $\qquad b)\ 2(3x-2)-(x+3)=8$ $\qquad c)\ \frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=4$
    $d)\ \frac{3x+5}{6}-\frac{5x+4}{9}=1-\frac{x}{18}$ $\qquad e)\ 2(x+5)=\frac{2}{5}(x-3)$ $\qquad f)\ 3(x-1)+1=-x+\frac{5}{2}(1-x)+\frac{x+3}{2}$
    $g)\ x-\frac{x-4}{3}+\frac{3x-2}{4}-4=-\frac{x+2}{2}$

13. Los camiones de transporte Fagnano y Túnel cobran sus servicios del siguiente modo: Fagnano cobra una cifra fija de $1600 y $80 por cada kilómetro que recorre.

Túnel cobra una cifra fija de $1840 y $50 por cada kilómetro que recorre.
Javier necesita contratar un camión para llevar mercadería entre dos parajes.
Si contrata los servicios de Fagnano gasta una vez y media más de lo que gasta si contrata los servicios de Túnel. ¿Cuál es la distancia entre los dos parajes?

14. Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo antideslizante de 1,5 metros de ancho. La piscina es 10 metros más larga que ancha. Si la superficie del pasillo es de 129 metros cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones de la piscina?

15. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después, la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

16. Francisco ha comprado tres pantalones y tres chalecos que le costaron $10800. Gerardo ha comprado 2 camisas. Francisco no recuerda el precio de los pantalones ni de las chaquetas, y Gerardo le dice que solo sabe que cada uno de los pantalones valía el doble que su camisa y que cada chaqueta valía el triple que su camisa. ¿Cuál es el precio de cada pantalón y cada chaqueta de Francisco? Explica cómo llegas al resultado.

17. Si:

$$\frac{a-b}{5}=\frac{3.(a+b)}{20}$$, entonces a es siempre igual a:

$a)7b$ $\qquad$ $b)\ -\frac{b}{7}$ $\qquad$ $c)2b$ $\qquad$ $d)\ 0$ $\qquad$ $e)\ \frac{2b}{5}$

18. Con un descuento del 20%, el precio de liquidación de un artículo es de $2200. ¿Cuál es el precio original del artículo?.
Marca la respuesta correcta:
a) $2750 b) $2640 c) $2000 d) $1760
19. Un comerciante compra un artículo en $3200 y lo vende en $3830. ¿Cuál es el porcentaje de ganancia?

Repasando ecuaciones de segundo grado…

20. Resuelve las ecuaciones:

$a)x^2-2=14$ $\qquad$ $b)\ (x-1)(x+2)=0$ $\qquad$ $c)\ 3x^2-6x=0$

$d)\left(x+\frac{3}{4}\right).(x-3)=0$ $\qquad$ $e)\ (2x+5).x=0$ $\qquad$ $f)\ (3x-1).(2x+6)=0$

$g)\ 2x^2+\frac{1}{2}x=0$ $\quad h)\ -\frac{4}{5}x^2+5x=0$ $\quad i)\ x^2-7x+12=0$

$j)\ x^2=x$ $\quad k)\ \frac{x^2-1}{6}=4$ $\quad l)\ 6x^2-7x+2=0$

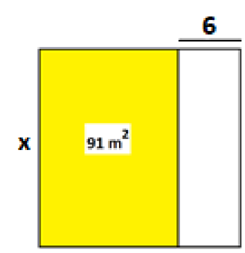
$m)\ x^2+2x-3=0$ $\quad n)\ x^2-6x+9=0$ $\quad ñ)\ \frac{7-x}{4}+\frac{1-x}{2}=x^2+4x+1$

21. A un número lo multiplico por su consecutivo y al resultado le resto 2. ¿Qué número hay que usar para que la cuenta de por resultado 0?. ¿Hay un único número que cumple esta condición?

22. Halla un número que verifique que su cuadrado, más su triplo sea igual a 40. Hay uno sólo?.

23. El número de días del año, 365, es un número muy peculiar. Es el único número que es suma de tres cuadrados de números consecutivos y que además es también suma de los cuadrados de los dos siguientes. Averigua cuáles son esos números.

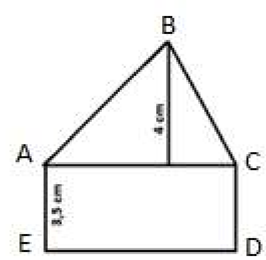
Ecuaciones y geometría. …



24. Al disminuir en 6 metros el lado del cuadrado, el área del rectángulo obtenido es 91 m^2.
¿Cuál es el lado del cuadrado inicial?

25. El perímetro de un rectángulo mide 20 cm y su área 21 cm^2. Calcula sus dimensiones.

26. Si el perímetro del rectángulo $ACDE$ es 19cm. Cuál es el área del triángulo ABC?



$a) 7cm^2$ $\quad b)\ 12cm^2$ $\quad c)\ 18cm^2$ $\quad d)\ 24cm^2$

27. El rectángulo $ABCD$ se dividió en cuatro rectángulos iguales, trazando paralelas al lado AD. La longitud de AB es el triple de la longitud deBC.
La diferencia entre el área del rectángulo $ABCD$ y el área de uno de esos rectángulos es 144 cm^2. ¿Cuál es la longitud de AD?

Recordemos algunas operaciones con polinomios….

1. Efectúa, en cada caso, las siguientes operaciones:

$$P(x)+Q(x) \;\; ; \; P(x).Q(x) \;\; ; \; 3.\left(P(x)+Q(x)\right) \; ; \;\; x.P(x)$$

Siendo:

$$a)P(x)=7 \qquad Q(x)=x^3-2x^2+x+1$$
$$b)P(x)=x^2-2 \qquad Q(x)=-x^2+6$$
$$c)P(x)=2x+1 \qquad Q(x)=x^2+4$$

Anticipa, antes de realizar la operación, el grado del polinomio resultante y compáralo con los resultados hallados.

2. Si $P(x) = 2x^2+5x+2$
   a) Calcula: $P(0); P(-\frac{1}{2}); P(3); P(-2)$
   b) Indica las raíces de $P(x)$

3. Si se quiere resolver la siguiente división entre polinomios:

$$2x^4-x^2+7x-3 \,\underline{|x-2}$$

Se puede aplicar la regla de Ruffini.

	2	0	-1	7	-3
2		4	8	14	42
	2	4	7	21	39=resto

$$C(x)=2x^3+4x^2+7x+21$$

Recuerda que la regla de Ruffini se puede utilizar sólo cuando se quiere dividir un polinomio por otro de la forma: x - a , donde a es un número real cualquiera.

4. El cociente de la división del polinomio:

$$P(x)=x^3-3x^2+3x-1, \;\; \text{por el polinomio:} \;\; Q(x)= \; x\text{-}1, \;\text{es:}$$

$$a)x \qquad b)\; x^2-1 \qquad c)\; x^2-2x+1 \qquad d)\; x\text{-}1$$

5. a) Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

$$a)\ (x^3-3x^2+2x+4):(x-1) \qquad b)\ (2x^4+x^3-5x-3):(x-2)$$
$$c)\ (3x^3-5x^2+8x-7):(x+1) \qquad d)\ (x^4+x^2+1):(x+3)$$

b)Comprueba, en cada una de las divisiones anteriores, que **el resto** de dividir un polinomio $P(x)$, por otro de la forma $(x-a)$, con $a \in \mathcal{R}$, **es igual a $P(a)$** (este es el enunciado del Teorema del Resto). Es decir: $\boxed{R = P(a)}$

6. Marca la única opción correcta:

a) Sea $P(x) = -x^4 - 3x^3 + x + 1$. El resto de dividir $P(x)$ por $(x+2)$, es:
$i)7 \qquad ii)-37 \qquad iii)\ 0$

b) El resto de dividir el polinomio $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 5$ por $(x+3)$,es:
$i)\ 205 \qquad ii)\ 271 \qquad iii)\ 3 \qquad iv)-1$

7. ¿Qué resto se obtiene al dividir los siguientes polinomios?

$$a)P(x)=x^3-27 \quad , \quad Q(x)= x-3 \qquad b)P(x)=x^3+64 \quad , \quad Q(x)= x+4$$
$$c)P(x)=x^4-16 \quad , \quad Q(x)=x-2 \qquad d)P(x)=x^4-16 \quad , \quad Q(x)=x+2$$

La diferencia de potencias de igual grado impar es divisible por la diferencia de sus bases. La suma de potencias de igual grado impar es divisible por la suma de sus bases. La diferencia de grado par es divisible, tanto por la suma como por la diferencia de sus bases.

8. Se sabe que al dividir los siguientes polinomios:

$$P(x)=x^3-x^2+ax-10 \qquad Q(x)=x-2$$

La división es exacta. ¿Cuál es el valor de a?

9. Indica verdadero o falso, justificando analíticamente cada respuesta.

Siendo $P(x)=x^2+3x-4$

$a)$Si $P(1)=0 \Rightarrow P(x)$ es divisible por $x+1$ b) Si $P(-4)=0 \Rightarrow P(x)$ es divisible por $x-4$

$c)$ $P(2)=6 \Rightarrow$ el resto de la division de $P(x)$ por $x-2$ es 6 d) $P(1)=0 \Rightarrow 1$ es raiz de $P(x)$

¿Qué es la factorización de polinomios?, es expresarlos como productos de otros polinomios.

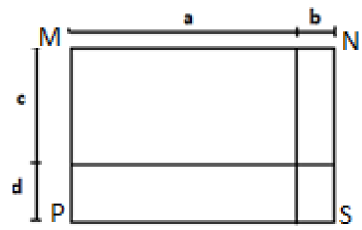
10. Factorea los siguientes polinomios, encontrando previamente sus raíces reales

$$a)x^2+8x+7 \qquad b)x^2-4x-5 \qquad c)2x^2+5x-3$$

11. Factorea las siguientes expresiones, extrayendo factor común:

$a) 25a^2 + 30a^4 - 35a^6$ $\qquad$ $b) \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$ $\qquad$ $c) 6a^2x^3 - 3ax^4 + 21a^2x^5$

12. Observa la siguiente figura y escribe dos expresiones que permitan calcular el área del rectángulo $MNSP$.



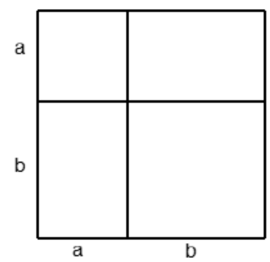
13. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son válidas y pueden relacionarse con el gráfico?. Justifica

$i.\ (a+b)^2 = a^2 + b^2$

$ii.\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$iii.\ (a+b)^2 = a^2 + b^2 + a^2b^2$

$iv.\ (a+b)(a-b) = a^2 + ab + ba + b^2$



14. Expresa los siguientes cuadrados de binomios como trinomios cuadrados perfectos equivalentes.

$a) (x+3)^2 =$ $\qquad$ $b)\ (3x-2)^2 =$ $\qquad$ $c)\ (2x+3y)^2 =$ $\qquad$ $d) \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right)^2 =$

15. Expresa los siguientes trinomios cuadrados perfectos como cuadrados de binomios

$a) x^2 + 4x + 4 =$ $\qquad$ $b)\ 4x^2 + 4x + 1 =$ $\qquad$ $c)\ 9x^2 - 12x + 4 =$

16. Teniendo en cuenta que:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Escribe los desarrollos de:

$a) (-2+3x)^3$ $\qquad$ $b)\ (-x+x^4)^3$ $\qquad$ $c) \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2\right)^3$

17. Teniendo en cuenta que:

$$\boxed{(a+b).(a-b) = a^2 - b^2}$$

Escribe el resultado de:

$a) (x+2).(x-2) =$ $\qquad$ $b)\ (3 - a)(3+a) =$ $\qquad$ $c)\ (a-x).(a+x) =$

18. Teniendo en cuenta, el ejercicio anterior, halla, por simple inspección, el cociente de:

$a)\dfrac{x^2-1}{x+1}$ $\quad b)\ \dfrac{1-x^2}{1-x}$ $\quad c)\ \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ $\quad d)\ \dfrac{9-x^4}{3-x^2}$ $\quad e)\ \dfrac{x^2-16}{x-4}$

19. En este cociente,

$$\frac{x+1}{6x-6}:\frac{x^3+3x^2+2x}{3x^2-3x}$$

luego de factorear y simplificar, se obtiene:

(Marca la respuesta correcta)

$a)2(x+2)$ $\quad b)\ \dfrac{1}{2}(x+2)$ $\quad c)\ \dfrac{x+1}{2(x-1)(x-2)}$

$d)\dfrac{x-1}{2(x+1)(x+2)}$ $\quad e)$ ninguna de las anteriores

20. Saca factor común y luego simplifica:

$a)\dfrac{9x+9}{6+6x}$ $\quad b)\ \dfrac{x-5}{2x-10}$ $\quad c)\ \dfrac{x^2}{x^2-x}$ $\quad d)\ \dfrac{10x}{10x^2-15x}$

21. Factorea y luego simplifica las siguientes expresiones:

$a)\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ $\quad b)\ \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}$ $\quad c)\ \dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

$d)\dfrac{x^2-25}{x^2+25-10x}$ $\quad e)\ \dfrac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}$ $\quad f)\ \dfrac{9x^2-4}{3x-2}$

22. La expresión que resulta de efectuar:

$$\frac{5x}{x+1}+\frac{2}{x} \quad \text{es:}$$

$a)\dfrac{5x+2}{2x+1}$ $\quad b)\ \dfrac{5x^2+2x+2}{x^2+x}$ $\quad c)$ Ninguna de las anteriores es correcta

23. Simplifica:

$a)\ \dfrac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ $\quad b)\ \dfrac{x+\frac{x}{2}}{x-\frac{x}{4}}$ $\quad c)\ \dfrac{x+4+\frac{3}{x}}{x-4-\frac{5}{x}}$ $\quad d)\ \dfrac{a-4+\frac{4}{a}}{1-\frac{2}{a}}$

Números enteros

El conjunto de los números enteros, que se representa con la letra Z , está formado por la unión de los siguientes conjuntos: el de los números naturales, el de los enteros negativos y el conjunto cuyo único elemento es el cero.

$$Z = N \cup \{0\} \cup Z^-$$

$$Z = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, \ 0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ 4 \ , ...\}$$

El conjunto de los naturales se identifica con los enteros positivos Z^+, es decir es lo mismo hablar de naturales que de enteros positivos.

Números racionales

- Los números racionales son los que se pueden escribir como una fracción: $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, con $b \neq 0$.

-Un número racional se puede expresar en forma fraccionaria o decimal.

$$\underbrace{\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = ... = \frac{25}{100}}_{\text{forma fraccionaria}} = \underbrace{0,25 = 0,250}_{\text{forma decimal}}$$

-Las expresiones decimales de los números racionales pueden clasificarse en:

* *expresiones decimales exactas*
* *expresiones decimales periódicas*

$0,75 = \frac{3}{4}$; $0,8 = \frac{4}{5}$; $0,625 = \frac{5}{8}$ expresiones decimales exactas

$0,\overset{\frown}{2} = \frac{2}{9}$; $0,\overset{\frown}{23} = \frac{23}{99}$; $0,2\overset{\frown}{5} = \frac{23}{90}$ expresiones decimales periódicas

Algunos ejemplos que ayudan a afianzar el concepto de número racional.

1. $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ (o, en términos de porcentaje, 40%)

2. $\frac{1}{4}$ de $180 = \begin{cases} \frac{1}{4}.180 \\ \frac{180}{4} \\ 180 \div 4 \end{cases}$

3. 20% *de* $180 = \frac{20}{100}.180 = \frac{1}{5}.180 = 0,20.180$

4. De 84 alumnos, 21 estuvieron ausentes, ¿cuál es el porcentaje de ausentes?.

$\frac{21}{84} = 0,25 = \frac{25}{100}$. El porcentaje de ausentes es de 25%.

Algunos ejemplos para afianzar la operatoria y propiedades de los números racionales

Analiza, los ejemplos de la 1º columna y la generalización correspondiente en la 2º columna.

$$\frac{3+4-5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad \text{..........} \quad \frac{a+b-c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}$$

$$\frac{8}{2+4}\neq\frac{8}{2}+\frac{8}{4} \quad \text{..............................} \quad \frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}=\frac{15}{28} \quad \text{..........................} \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{3}{8}\div\frac{7}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{14} \quad \text{.......................} \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Potenciación

$$a^n=\underbrace{a.a.a......a}_{n\text{ factores}} \qquad \begin{cases} a: & \text{es un número real cualquiera que se llama base} \\ n: & \text{es un número natural que se llama exponente} \\ a^n: & \text{es la potencia enésima de a} \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81}$ b) $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16$

c) $-2^4=-(2.2.2.2)=-16$ d) $10^3=10.10.10=1000$

Exponentes cero y negativos

Si a es un número real distinto de cero y n es un número entero positivo, entonces:

$$a^0=1 \quad \text{y} \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$ b) $3^0=1$ c) 0^0 no está definido d) $3^{-1}=\frac{1}{3}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$ f) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$ g) $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$

$h)\ (-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{-27}=-\frac{1}{27}$ i) $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0,001$

Propiedades de la potenciación

Sean: $a \in R$, $b \in R$, $n \in N$ y $m \in N$, se cumplen las siguientes propiedades:

I. Distributiva con respecto al producto y al cociente

$(a.b)^n = a^n.b^n$ $\qquad$ $(3.5)^4 = 3^4.5^4$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = \dfrac{3^4}{5^4}$

II. Producto y cociente de potencias de igual base, potencia de potencia.

$a^n.a^m = a^{n+m}$ $\qquad$ $2^3.2^5 = 2^{3+5}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad$ $\dfrac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$

$\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$ $\qquad$ $\left(3^2\right)^5 = 3^{2.5} = 3^{10}$

Observación: La potenciación no es distributiva con respecto a la suma ni a la diferencia:

$$\left.\begin{array}{l}(5+2)^2 = 7^2 = 49 \\ 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29\end{array}\right\} \Rightarrow (5+2)^2 \neq 5^2 + 2^2$$

$$\left.\begin{array}{l}(9-2)^2 = 7^2 = 49 \\ 9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77\end{array}\right\} \Rightarrow (9-2)^2 \neq 9^2 - 2^2$$

La potenciación con exponente racional.

Sea $a \in R$, se llama potencia de base a y exponente $\dfrac{1}{n}$, a la raíz enésima de a, en símbolos:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \ ; \forall n \in N}$$

Observación: Si n es par, debe ser: $a \geq 0$

Ejemplos:

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$ $\qquad$ $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$ $\qquad$ $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32}$

¿Por qué se impone la condición de que si n es par, debe ser $a \geq 0$?, porque:

$(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16}$ no tiene solución en R

O sea que si a<0, necesariamente n debe ser impar para que exista $\sqrt[n]{a}$

Vamos a generalizar y definir las potencias de la forma: $a^{\frac{m}{n}}$

Si utilizamos la definición anterior y las propiedades de la potenciación, vemos que:

Si $x = 8^{\frac{2}{3}} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8^2}$

Si $x = 9^{\frac{4}{3}} = \left(9^4\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{9^4}$

Podemos decir que $\forall n \in N, \forall m \in N$:

$$\boxed{Si\ a > 0 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

$$\boxed{Si\ a < 0 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ solo si n es impar}}$$

Propiedades de la radicación

Si $a \in R,\ a > 0,\ b > 0,\ n \in N\ y\ m \in N,$ se cumplen las siguientes propiedades:

Distributiva respecto del producto	$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
Distributiva respecto del cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ ,\ \forall b \neq 0$
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Recordemos:

La radicación **no es distributiva** con respecto a la suma ni a la diferencia.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{64+16} = \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{64} + \sqrt{16} = 8 + 4 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{64+16} \neq \sqrt{64} + \sqrt{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3 \\ \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$$

Notación científica

Un número está expresado en **notación científica** cuando se escribe como el producto de dos factores:

- una potencia de 10 y
- un número mayor o igual que 1 y menor que 10. Es decir:

a x **10^{n}** siendo $1 \le a < 10$ y **n** entero.

La notación científica es muy útil para expresar cantidades muy grandes, como el año luz (distancia que recorre la luz en un año), que es aproximadamente 9.460.800.000.000 km; o cantidades muy pequeñas, como el diámetro de un electrón, que mide aproximadamente 0,0000000000003 cm.

Ejemplos de pasaje de números en notación decimal a notación científica

Not. Decimal	$1 \le a < 10$	n	Not. Cient.
760000000000	7,6	11	$7{,}6.10^{11}$
35600000000000	3,56	13	$3{,}56.10^{13}$
0,0000000045	4,5	-9	$4{,}5.10^{-9}$
0,0000000000027	2,7	-12	$2{,}7.10^{-12}$

Clasificación de los números

Nos hemos referido a los números racionales e hicimos hincapié en sus distintas representaciones de tipo simbólico, como las notaciones fraccionaria, decimal y porcentual. Por otro lado, también trabajamos, en el práctico 1, con números que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, por ejemplo $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$, que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Estos números son los números irracionales. Algunos tipos de números irracionales, lo constituyen:

- las raíces cuadradas de números naturales que no den por resultado otro número natural, por ejemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7},..$
- los resultados de operar $(+, -, \times, \div)$ un número irracional con otro racional, por ejemplo: $1+\sqrt{2}$, $\frac{3+\sqrt{6}}{5}$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\frac{4}{5+\sqrt{3}}$,..

- los números: $\pi = 3{,}141592654...$; $e = 2{,}718281..$; el "número de oro", que se designa con la letra griega $\phi = 1{,}61803...$ (Fi). Este número, que también se puede expresar como $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,es solución de la ecuación de segundo grado: $x^2 - x - 1 = 0$.

Para clarificar lo dicho, recurrimos al siguiente cuadro:

Clasificación de los números reales

$$\text{REALES}\begin{cases}\text{RACIONALES}\begin{cases}\text{ENTEROS}\begin{cases}\text{ENTEROS POSITIVOS O NATURALES} & (1;5;100;324;....)\\ \{0\} & \\ \text{ENTEROS NEGATIVOS} & (-12;-54;-120;....)\end{cases}\\ \\ \text{FRACCIONARIOS} \quad (0,24;\frac{3}{4};1,\overset{\frown}{45};-\frac{8}{7};...)\end{cases}\\ \\ \text{IRRACIONALES} \quad (\sqrt{2};-\sqrt{3};\sqrt[3]{7};\pi;...)\end{cases}$$

Qué ocurre si tenemos que resolver la ecuación $x^2-4x+13=0$. Vemos que al aplicar la fórmula para resolverla, obtenemos $x=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$. Como dentro de los números Reales *no está permitida la operación radicación de índice par de un número negativo*, entonces al definirse la unidad imaginaria como $i=\sqrt{-1}$, la expresión anterior puede escribirse $x=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{36}\sqrt{-1}}{2}=\dfrac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$. Estos números se llaman, números complejos.

Son números de la forma $a+bi$, donde $a\ y\ b$ son reales. Los números reales resultan incluidos dentro de los números complejos, podemos ampliar entonces la clasificación anterior y escribir

$$\text{Complejos}\begin{cases}\text{Reales}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Empecemos con un ejemplo. La suma de las edades de Julia y Sofía es 26 años y, esta última tiene 8 años menos que Julia. ¿Cuáles son sus edades?

Si representamos con x la edad de Julia, y con $x-8$ la edad de Sofía, la expresión que resulta es:

$x+x-8=26$, que se puede escribir $2x-8=26$

Esta expresión es una ecuación lineal donde x es la incógnita. La solución de esta ecuación es el valor de x que verifica la igualdad. En este caso la solución es 17, ya que si reemplazamos este valor en dicha ecuación, ésta se transforma en una identidad numérica. Es decir: 2.17-8=26

Resolver una ecuación significa determinar si tiene solución, y en tal caso hallar dicha solución. Para poder resolver una ecuación se hace uso de algunas propiedades de la aritmética.

Analicemos primero estas ecuaciones:

$$4x-5=91$$
$$2x+2=50$$
$$12x-15=273$$

Estas tres ecuaciones tienen a $x=24$ como solución. **Como las tres ecuaciones tienen la misma solución, se llaman equivalentes.**

La noción de ecuaciones equivalentes es de suma importancia para resolver ecuaciones, porque cuando la resolución de una ecuación es complicada, se busca otra ecuación equivalente a la dada cuya resolución sea mucho más sencilla.

Transformación de ecuaciones en otras equivalentes

- **Si en cada miembro de una ecuación se suma un mismo número real o una expresión algebraica entera, se obtiene una nueva ecuación equivalente a la dada.**
- **Si cada miembro de una ecuación se multiplica por un mismo número real, se obtiene una nueva ecuación equivalente a la dada.**

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $2x+2=50$

Si sumamos en ambos miembros -2, se obtiene $2x+2+(-2)=50+(-2) \Rightarrow 2x=48$.

Si multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{2}$ (que es equivalente a dividir por 2), se obtiene

$\frac{1}{2}.2x=\frac{1}{2}.48 \Rightarrow x=24$.

Es decir, $x=24$ es la solución de la ecuación dada.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $4x-5=91$.

Si sumamos en ambos miembros 5, se obtiene $4x-5+5=91+5 \Rightarrow 4x=96$.

Si multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{4}$ (que es equivalente a dividir por 4), se obtiene

$\frac{1}{4}.4x=\frac{1}{4}.96 \Rightarrow x=24$.

Su solución es $x=24$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $8x+5=3x-2$

Sumando -5 (o restando 5) en los dos miembros, resulta:

$$8x+5+(-5)=3x-2+(-5)$$

$$8x=3x-7$$

Restando la expresión $3x$, en ambos miembros:

$$8x-3x=3x-3x-7$$

$$5x=-7$$

Dividiendo ambos miembros por 5 o multiplicando por $\frac{1}{5}$, resulta: $x=-\frac{7}{5}$

Esta solución se puede expresar: $S=\left\{-\frac{7}{5}\right\}$

Es conveniente comprobar si el resultado es correcto, para lo cual, se reemplaza la x por el valor $-\frac{7}{5}$ en la ecuación original, y debe obtenerse una igualdad.

$$8.\left(-\frac{7}{5}\right)+5=3.\left(-\frac{7}{5}\right)-2$$

$$-\frac{56}{5}+5=-\frac{21}{5}-2$$

$$\frac{-56+25}{5}=\frac{-21-10}{5}$$

$$-\frac{31}{5}=-\frac{31}{5}$$

Cabe preguntarse si las ecuaciones de primer grado con una incógnita, siempre tienen una única solución.

Ejemplo 4: Resolver la ecuación: $\frac{5}{3}(x+1)+\frac{4}{3}x=3x+\frac{1}{4}$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}x=3x+\frac{1}{4}$$

Agrupamos los términos donde figura la incógnita:

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right)x+\frac{5}{3}=3x+\frac{1}{4}$$

$$3x+\frac{5}{3}=3x+\frac{1}{4} \qquad (*)$$

Restamos $3x$ en ambos miembros:

$$\frac{5}{3}=\frac{1}{4}$$

Esto es falso, por lo tanto se concluye que la **ecuación no tiene solución.**
También se podría pensar de esta manera, si en la ecuación (*) se restan en ambos miembros $3x$ y $\frac{5}{3}$, se obtiene:

$$0x=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}$$

$$0x=-\frac{17}{12}$$

Esta igualdad no se verifica para ningún valor de x, porque no hay valor de x que multiplicado por 0 de por resultado $-\frac{17}{12}$.

Ejemplo 5: Resolver la ecuación: $4x+3+9x-4=13x-1$

Agrupamos los términos donde figura la incógnita:

$$13x-1=13x-1$$

Esta igualdad se verifica para cualquier valor de x, por lo tanto la ecuación tiene **infinitas soluciones.**
También se podría pensar de esta manera, si se resta en ambos miembros $13x$, y se suma 1 en cada miembro, se obtiene:

$$0x=0$$

Esta expresión se verifica para cualquier valor de x.

Resumiendo:

Las ecuaciones lineales en una variable se pueden expresar en la forma general $ax = b$, donde a es el coeficiente de la incógnita y b es el término independiente

Sólo si $a \neq 0$, existe una única solución de la ecuación, y está dada por $x = \frac{b}{a}$.

Si $a = 0$, se presentan dos posibilidades: $\begin{cases} b \neq 0 & \text{No existe solucion} \\ b = 0 & \text{Existen infinitas soluciones} \end{cases}$

Porcentaje

Ejemplo 6

Un comerciante tiene una ganancia de 25% sobre el precio de costo de los productos que vende.

a) Si el producto A le costó \$3520, ¿a cuánto deberá venderlo para obtener dicha ganancia?
b) Si vendió el producto B a \$2750, ¿cuál habrá sido el precio de costo?

Primero vamos a interpretar qué significa tener una ganancia del 25%. Significa que por cada \$100 se ganan \$25. Y lo expresamos así:

$$25\% = \frac{25}{100}$$

Pero decir 25 de cada 100, es lo mismo que decir 1 de cada 4. Con lo cual:

$$\boxed{25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25}$$

Es claro entonces, que para hallar el 25% de una cantidad, por ejemplo el 25% de \$3520, se debe resolver:

$$\left(\frac{25}{100}\right)\$3520 = 0,25.\$3520 = \$880$$

La forma más sencilla para hallar el tanto por ciento de una cantidad, es expresar el tanto por ciento en forma decimal y multiplicarlo por dicha cantidad.

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema planteado anteriormente.

a) ¿Cómo calculamos el valor de venta del producto A sabiendo que se quiere obtener una ganancia del 25%?.

Para resolver planteamos la siguiente ecuación:

$$3520 + 0,25.3520 = x$$

Resolviendo las cuentas resulta: $x = \$4400$

El producto se debe vender a $\$\,4400$.

b) Vamos a calcular ahora el precio de costo, sabiendo que lo vendió a \$2750. Para resolver esta situación suponemos que x es el precio de costo, entonces planteamos:

$$x + 25\%\, x = 2750$$

O sea que: $x + 0{,}25\, x = 2750$

Sacando factor común x, resulta: $x(1 + 0{,}25) = 2750$

Despejando el valor de $x = \dfrac{2750}{1{,}25}$ y efectuando los cálculos correspondientes, obtenemos: $x = 2200$.

El precio de costo del producto es: $\$2200$.

Ejemplo 7

El precio de costo de un artículo es \$1430 y el precio de venta es \$1980. ¿Cuál es la variación porcentual de aumento?

Planteamos la siguiente ecuación:

$$1430 + x\%1430 = 1980$$

Sacando factor común \$1430, resulta:

$$1430(1 + x\%) = 1980$$

O sea que:

$$1 + x\% = \frac{1980}{1430}$$

De donde resulta que: $x\% = \dfrac{1980}{1430} - 1$

Es decir: $x\% = \dfrac{1980 - 1430}{1430} = 0{,}20$ $\quad \left(V.porcentual = \dfrac{V.final\text{ - }V.inicial}{V.inicial} \right) = x\%$

Coeficientes de aumento y de disminución

Ejemplo 8

En muchas oportunidades habrás escuchado frases de este tipo:

" Si abona el pasaje en tres cuotas se le recarga un 12%"

"*Hoy sobre todas las compras de más de \$2000 recibe un descuento del 12%*",

a) ¿cómo podemos expresar dicho enunciado en lenguaje simbólico?, si llamamos x al precio del pasaje, podemos expresar que C_1 (el precio del pasaje incrementado en un 12%), será:

$C_1 = x + 12\% x = x + \dfrac{12}{100}x = x + 0,12.x = x(1+0,12) = x\ 1,12 \Rightarrow 1,12$ este último número se llama **coeficiente de aumento.**

Por ejemplo, si el pasaje cuesta $1500, y al pagarlo en tres cuotas nos recargan un 12%, deberemos pagar $\$1500(1,12) = \$1680$

b) En el segundo caso, el precio de la compra recibe una rebaja del 12%, entonces:

si llamamos x al monto de la compra, podemos expresar que C_0 (el precio de la compra rebajado en un 12%), será:

$C_0 = x - 12\% x = x - \dfrac{12}{100}x = x(1-0,12) = x(0,88) \Rightarrow 0,88$ este último número se llama **coeficiente de disminución.**

Por ejemplo, si hacemos una compra de $2500, con el descuento del 12%, pagaremos $2200.

Es decir que:

Para hallar aumentos o disminuciones porcentuales, se multiplica la cantidad inicial por el coeficiente de variación (de aumento o disminución)

Encadenamiento de aumentos o disminuciones porcentuales

¿Qué pasará cuando se "encadenan" los porcentajes de aumentos o disminuciones?

Vamos a suponer que una cantidad C se incrementa primero en un 12% y luego en un 18%. ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a la variación porcentual total?

Partimos de sumar el 12% de C, a la cantidad inicial C.

$$C + \frac{12}{100}C = C(1,12)$$

Luego sumamos a esta cantidad incrementada: $C(1,12)$, el 18% de la misma, con lo cual, resulta:

$$C(1,12) + \frac{18}{100}C(1,12)$$

Sacando factor común: $C(1,12)$ resulta:

$$C(1,12)(1+0,18) = C(1,12)(1,18) = \boxed{1,3216\ C}$$

Podemos concluir que cuando se aplican dos aumentos porcentuales sucesivos a una cantidad, el valor final resulta de multiplicar los coeficientes de aumento por el capital inicial.

Se procede de la misma forma cuando se encadenan disminuciones porcentuales, sólo que multiplicando el capital inicial por los coeficientes de disminución.