Universidad Nacional de Tierra del Fuego,
Antártida e Islas del Atlántico Sur

Instituto de Ciencias Polares,
Ambiente y Recursos Naturales

LÓGICA PROPOSICIONAL Y TEORÍA DE CONJUNTOS: UNA RÁPIDA INTRODUCCIÓN

FERNANDO DOBARRO - ERICA SCHLAPS - DIANA VIÑOLES

Índice

Date: 23 Febrero 2021.

Glosario de Simbología Lógica y Matemática.

$/$: tq	tal que
$\wedge$.	y; conjunción
$\vee$	o; disjunción
$\veebar$	o exclusivo
$\neg$ $\sim$	no; negación
$\Rightarrow$	implica; si, ... entonces; implicación material
$\Leftrightarrow$	equivale; si y sólo si
$\in$	pertenece
$\notin$	no pertenece
$\subset$	incluido
$\subseteq$	incluido o igual
$\forall$	cuantificador universal, para todo
$\exists$	cuantificador existencial, existe al menos un
$=$	igual
$<$	menor
$>$	mayor
$\leq$	menor o igual
$\geq$	mayor o igual
$\approx$	aproximadamente
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\bigcup$	unión de conjuntos
$\bigcap$	intersección de conjuntos
ϕ	conjunto vacío

1. Elementos de Lógica Matemática

1.1. **Introducción Informal.** Se suele definir a la **Lógica** como la ciencia del razonamiento. En realidad el razonamiento es un tipo especial de pensamiento en el cual se realizan inferencias (derivaciones) y siendo un tipo de pensamiento forma parte del tema de estudio de la psicología. La Lógica se ocupa de descubrir que hace que un **razonamiento** (o esquema de razonamiento) sea **correcto**.

Esencialmente podemos hablar de dos tipos de **razonamiento**: **inductivo** y **deductivo**. En el **razonamiento inductivo** observamos patrones de los cuales obtenemos conclusiones con algún grado de probabilidad.

Un **argumento lógico** se compone de **premisas** (suposiciones, leyes, reglas, ideas ampliamente aceptadas u observaciones) y una **conclusión**. Juntas, las premisas y la conclusión componen el argumento. El **razonamiento deductivo** exige extraer conclusiones de premisas generales dadas mediante argumentos válidos.

Un argumento será **válido** si sus premisas y conclusión son tales que la verdad de las primeras implica la de la última: si las premisas de un argumento válido son todas verdaderas, su conclusión también debe ser verdadera. Notemos que no se dice que las premisas sean verdaderas. La validez de un argumento es independiente de que sus premisas y su conclusión sean verdaderas. Se dice que la conclusión de un argumento válido es una consecuencia lógica de sus premisas.

1.2. **Nociones de Lógica Matemática.** La Lógica Matemática es una disciplina que tiene como objetivo analizar y formalizar métodos de los razonamientos correctos. Las investigaciones en este campo se inciaron a principios del siglo XX, estimuladas por contradicciones lógicas (reales o aparentes) en la Teoria de Conjuntos desarrollada por Boole y Cantor [1] . Esto originó una revisión profunda de los fundamentos de la matemática, la cual se puede considerar no concluida. Más allá de las cuestiones teóricas, esto dió origen a vastas aplicaciones concretas, basta pensar a la informática.

Aquí nos limitaremos a una somera introducción de algunas cuestiones de la Lógica Matemática que serán de utilidad en los sucesivos cursos de las carreras de Ciencias Naturales y por que no, también en la vida cotidiana.

Con el objetivo de construir algunos ejemplos básicos, asumiremos sólo una cierta familiaridad con los conjuntos de números mas elementales como los naturales, enteros y racionales.

video 1

1.3. **Lógica Proposicional. Conectivos Lógicos.** En el lenguaje común así como en la matemática los elementos constitutivos son las **proposiciones**: *frases de las cuales tenga sentido decir que sean verdaderas o falsas.* Frecuentemente distinguiremos estas colocandolas entre comillas, con el objetivo de eliminar ambigüedades. Por ejemplo:

- "Sócrates es un hombre"
- "Leonardo da Vinci estudió la anatomía humana"
- "$3 \cdot 5 = 15$"
- "7 es un número natural"

[1](t) George Boole ($1815 - 1864$) fue un lógico-matemático inglés. Su libro, Investigación de las Leyes del Pensamiento, publicado en 1854, señala la creación del primer sistema práctico de Lógica Simbólica. George F. L. P. Cantor (1845-1918) y su escuela crearon la moderna Teoría de Conjuntos en el período $1874 - 1895$.

- "$\frac{3}{4}$ es un número natural"

son proposiciones, pero las siguientes no lo son:

- ¿Quién es?
- ¿Juan es estudiante?
- La caja de Pedro.

Diremos que una proposición tiene valor de verdad V (o 1) cuando sea verdadera y F (o 0) cuando sea falsa. Por ejemplo las primeras 4 proposiciones precedentes son verdaderas y la quinta no lo es. Vamos a representar a las proposiciones con letras del alfateto latino, por ejemplo:

- $p =$"2 es un número natural".
- $q =$"el perro ladra".
- $r =$"el caballo es un mamífero".

Dada una proposición p se puede construir su negación, la cual indicaremos como $\sim p$ y se lee "no de p", Obviamente, si p es verdad, $\sim p$ es falsa y viceversa. Por ejemplo: si p es el enunciado (falso): "7 es un número natural par", entonces "$\sim p$"es el enunciado (verdadero): "7 es un número natural no par". video 2

Las proposiciones se conectan entre ellas dando lugar a **proposiciones compuestas**. En el lenguaje común estas conexiones se realizan mediante las llamadas conjunciones. Pero en lógica matemática se llaman **conectivos lógicos**. Cuando una proposición **no** se puede escribir en base a otras proposiciones mediante conectivos lógicos, se dice que es una **proposición simple** o **atómica**. Entre los conectivos lógicos menciomos a los siguientes:

Definición 1.1. La **conjunción** corresponde al "y"del lenguaje común y viene usualmente indicada con "$\wedge$", o también con "." .

Definición 1.2. La **disjunción** corresponde al "*o*"del lenguaje común y viene usualmente indicada con "$\vee$".

Definición 1.3. La **implicación** corresponde a "si ..., entonces ..."y viene simbolizada con "$\Rightarrow$".

Definición 1.4. La **doble implicación** corresponde a "...si y sólo si ..."y viene simbolizada con "$\Leftrightarrow$".

Mediante los conectivos lógicos y los paréntesis, podemos construir proposiciones compuestas. Para evitar la sobrecarga simbólica en las proposiciones compuestas, es conveniente introducir un orden jerárquico entre los paréntesis y los conectivos lógicos, en modo análogo *al orden jerárquico entre los paréntesis y las operaciones de la aritmética básica* $(+, -, \cdot, :)$. Este orden de enlace de izquierda a derecha es el siguiente:

$$\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow .$$

Por ejemplo, en lugar de escribir la proposición compuesta

$$((\sim p) \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow (p \vee (\sim r))$$

escribimos

$$\sim p \Rightarrow \sim q \Leftrightarrow p \vee \sim r.$$

video 3

1.4. **Tablas de Verdad.** Cuando dos proposiciones se ligan mediante conectivos lógicos, el valor de verdad de la proposción resultante depende de los valores de verdad de sus componentes siguiendo las siguientes reglas, las cuales se representan en base a las siguientes tablas de verdad.

Para la negación $\sim$:

(1.1)

p	$\sim p$
V	F
F	V

o

p	$\sim p$
1	0
0	1

,

donde 1 es V y 0 es F.

Para la conjunción $\wedge$, la disjunción $\vee$, la implicación $\Rightarrow$ y la doble implicación $\Leftrightarrow$, respectivamente:

(1.2)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

o equivalentemente

(1.3)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

En palabras:

- "$p \wedge q$" es verdad si p y q son ambas verdaderas; y falsa en los casos restantes
- "$p \vee q$" es falsa si p y q son ambas falsas; y verdadera en los casos restantes
- "$p \Longrightarrow q$" es falsa si p es verdad y q es falsa; y verdadera en los casos restantes

- "$p \iff q$" es verdadera si p y q son ambas verdaderas o ambas falsas; y falsa en los casos restantes.

video 4

Ejemplo 1.5.

(1) "$(1 \geq 1)$"es igual a "$(1 > 1) \vee (1 = 1)$", por lo tanto es verdadera porque $(1 = 1)$ es verdadera.

(2) "$(1 + 2 \geq 4)$"es igual a "$(1 + 2 > 4) \vee (1 + 2 = 4)$", por lo tanto es falsa porque ambas componentes son falsas.

(3) "$(1 + 2 \geq 4) \wedge$ (7 es un número naturale)"es falsa porque la primera es falsa.

(4) "$(1 + 2 \geq 4) \vee$ (7 es un número naturale)"es verdadera porque la segunda es verdadera.

(5) "$(1 + 3 \geq 7) \Rightarrow$ (7 es un número naturale)"es verdadera porque la proposición antecedente es falsa.

(6) "$(1 + 3 \geq 7) \Leftrightarrow$ (7 es un número naturale)"es falsa.

(7) "$(1 + 3 \geq 7) \Leftrightarrow (7 = 4)$"es verdadera.

video 5

Se puede notar que el uso del conectivo lógico "$\Rightarrow$"no corresponde precisamente a la frase del lenguaje usual "si ..., entonces ...". En efecto, cuando utilizamos esta frase, asumimos que las proposiciones componentes p y q tengan una correlación causal o algún tipo de conexión. En tanto en matemática la verdad de la proposición "$p \Rightarrow q$"depende solo de los valores de verdad de p y q, sin necesidad de algún tipo de conexión entre ellas.

El origen de la tabla de verdad de " $p \Rightarrow q$" puede ser explicado intuitivamente como sigue.

Examinemos la frase:

"Si sale el sol iré a pasear".

Esta es equivalente a:

"No sale el sol o iré a pasear".

Notemos que si no sale el sol, no se dice nada respecto a ir a pasear.

Entonces en el lenguaje común

"$p \Rightarrow q$"

equivale a decir

"$\sim p \vee q$".

La tabla de verdad de "$\sim p \vee q$"es:

(1.4)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Notemos que la misma coincide con la de "$p \Rightarrow q$".

Observamos además que la implicación "$p \Rightarrow q$"usualmente se lee como:

"p es condición suficiente para que valga q",

o como:

"q es condición necesaria para que valga p".

Son también usuales las siguiente expresiones:

" p sólo si q"

o

" q si p".

La doble implicación "$p \Leftrightarrow q$", que expresa la equivalencia lógica de las proposiciones p y q, se lee:

"condición necesaria y suficiente para que valga p es que valga q",

o también

"p si y sólo si q".

Cuando dos proposiciones compuestas tienen la misma tabla de verdad se dice que son **proposiciones equivalentes**, en consecuencia podemos decir que

$$p \Rightarrow q \text{ es equivalente a } \sim p \vee q.$$

video 6

1.5. **Tautologías - Reglas de Deducción.** En todo tipo de argumentación lógica se hace uso de **reglas de deducción** (o de inferencia), es decir de reglas lógicas que precisan el correcto modo de razonar.

El siguiente es un ejemplo clásico de argumento válido

i: Sócrates es un hombre

ii: Si Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal

iii: (Entonces) Sócrates es mortal.

La secuencia **i**,**ii**,**iii** es una **deducción correcta** del enunciado **iii** de los enunciados **i** y **ii**; es decir, es una demostración que Sócrates es mortal.

Observemos que **iii no** se puede deducir sólo de **ii**. Más generalmente, de "$p \Rightarrow q$"**no** se puede deducir q.

Observemos más precisamente este hecho, consideremos el enunciado:

"si 5 es un número natural par, entonces 6 es un natural impar"

Si bien tal enunciado es verdadero ($F \Rightarrow F$ es V), **no** podemos deducir del mismo que 6 es impar.

Notemos además que la validez de la deducción de **iii** de **i** y **ii** **no** depende de la veracidad de **i** y **ii**. Efectivamente, la siguiente deducción es correcta:

i: Sócrates es un hombre

ii': Si Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es inmortal

iii': (Entonces) Sócrates es inmortal.

¿ Cuáles son los fundamentos de la validez de las precedentes deducciones?

Supongamos que queremos hacer ejecutar la secuencia **i**,**ii**,**iii** a una computadora, en cuya memoria se cargaron como hipótesis los enunciados **i** y **ii**. La misma **no** podrá deducir el enunciado **iii**, a menos que se le de la siguiente instrucción:

"si en memoria están **i** y**ii**, también puede estar **iii**"

o equivalentemente

"si en memoria están p y $p \Rightarrow q$, también puede estar q".

Para entender el origen de esta regla de deducción consideremos el siguiente enunciado:

(MP) "$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$"

con su respectiva tabla de verdad

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	**(MP)**
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Notemos que **(MP)** es siempre verdadera, independientemente de los valores de verdad de p y q. De aquí, resulta natural considerar q como consecuencia lógica de p y $p \Rightarrow q$ y asi formular la siguiente regla de inferencia llamada "*modus ponens*":

(MP) de p y "$p \Rightarrow q$"se deduce q.

Desde el punto de vista práctico, el "*modus ponens*"opera del siguiente modo:

si p es verdadera y queremos mostrar que q es verdadera, se pasa a mostrar que "$p \Rightarrow q$"es verdadera.

Las proposiciones que son siempre verdaderas independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones componentes, se llaman **tautologías**. Podemos decir entonces que **(MP)** es una tautología. Contrariamente, las que son siempre falsas se llaman **contradicciones**. Las proposiciones que no son ni tautologías ni contradicciones se llaman **contingencias**.

video 7 *Ejemplo* 1.6. (de argumento válido tipo **(MP)**)

i: El piso esta sucio.

ii: Si el piso esta sucio, debo limpiarlo.

iii: (Entonces) Debo limpiar el piso.

Estructuremos este argumento:

$p =$ el piso esta sucio

$q =$ debo limpiar el piso

Luego, nuestro argumento se describe por:

i: p

ii: $p \Rightarrow q$

iii: (Entonces) q

También son usuales las siguientes escrituras:

$$\begin{array}{l} \text{Premisa 1: } p \\ \text{Premisa 2 : } p \Rightarrow q \\ \hline \text{Conclusión: } q \end{array}$$

o

$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Ejemplo 1.7. (de argumento **no válido**)

i: Voy a correr.

ii: Si llego temprano voy a correr.

iii: (Entonces) Llego temprano.

Estructuremos este argumento:

$p =$ llego temprano

$q =$ voy a correr

Luego, nuestro argumento se describe por:

i: q

ii: $p \Rightarrow q$

iii: (Entonces) p

También es usual la siguiente escritura:

$$\begin{array}{l} q \\ p \Rightarrow q \\ \hline p \end{array}$$

Veamos que **no es una tautología** y por lo tanto el razonamiento **no es válido**, para esto analizemos la correspondiente tabla de verdad:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \wedge (p \Rightarrow q)$	$q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Notemos que efectivamente, en la tercera linea $q \wedge (p \Rightarrow q)$ es V y p es F, de donde $q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ es F.

En síntesis (y rudimentariamente), diremos que un **argumento** es **válido** cuando la proposición construida en base al mismo resulta una tautología. De no ser así, el razonamiento se dice **inválido**.

De aquí, podemos indicar el siguiente procedimento (o algoritmo) para analizar la validez de un argumento:

(1) Identificar cada proposición del argumento con una letra.

(2) Expresar cada premisa y la conclusión mediante símbolos.

(3) Formar la proposición simbólica del argumento entero, colocando la conjunción de todas las premisas como antecedente de una proposición condicional y la conclusión del argumento como su consecuente.

(4) Completar la tabla de verdad de la proposición condicional del item (3).

(5) Si se obtuvo una tautología, el argumento es válido; si no es inválido

video 8

Ejemplo 1.8. Una importante tautología y su correspondiente argumento válido, es el llamado **principio de contradicción**, a saber:

(PC) $$\text{“}p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p\text{”}.$$

Su tabla de verdad es:

(1.5)

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	**(PC)**
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Es usual llamar a “$p \Rightarrow q$” implicación *directa*; a “$\sim q \Rightarrow \sim p$” implicación *contrareciproca*; a “$q \Rightarrow p$” implicación *inversa* y a “$\sim p \Rightarrow \sim q$” implicación *contraria.*

La tautología **(PC)** afirma la equivalencia lógica entre la implicaci;on directa y la contrareciproca. De aqui resulta la llamada técnica de **reducción al absurdo** (de muy frecuente uso en matemática), a saber: *bajo la hipótesis que p sea verdadera, para demostrar que q es verdadera se procede demostrando que “$\sim q \Rightarrow \sim p$” es verdadera.*

Otras tautologías, cuya verificación dejamos como ejercicio, son las siguientes:

Principio del Tercero Excluido

(TE) $$\text{“}p \vee \sim p\text{”}$$

Silogismo Hipotético

(SI) $$\text{“}(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\text{”}$$

Principio de No Contradicción

(NC) $$\text{“} \sim (p \wedge \sim p)\text{”}$$

Leyes de De Morgan [2]

(DM)$_1$ $$\text{“} \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q\text{”}$$

(DM)$_2$ $$\text{“} \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q\text{”}$$

Notemos que también es una tautología

$$\text{“}p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q\text{”},$$

en efecto ya observamos que “$p \Rightarrow q$”y “$\sim p \vee q$”tienen la misma tabla de verdad. De aqui,

$$\text{“} \sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q)\text{”},$$

luego por (**(DM)$_1$**)

$$\text{“} \sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q\text{”},$$

esto significa que negar “$p \Rightarrow q$”equivale a “$p \wedge \sim q$”.

Ejemplo 1.9. Consideremos las siguiente proposiciones:

[2] Augustus De Morgan (Madurai, India; 1806 - Londres, 1871) fue un matemático y filósofo británico nacido en la India. Conocido por formular las llamadas leyes de De Morgan y establecer un concepto riguroso del procedimiento, inducción matemática

p**:** "hoy llueve"

q**:** "no salgo de casa"

r**:** "miro el partido".

- "$p \Rightarrow q$" significa: "si hoy llueve no salgo de casa"
- "$p \wedge \sim q$" significa: "hoy llueve y salgo de casa"(la cual es la negación de la precedente).
- Por (**(SI)**) es válida la siguiente deducción: "si hoy llueve no salgo de casa"; "si no salgo de casa miro el partido"; entonces, "si llueve miro el partido".
- Por ($\mathbf{(DM)}_1$) "llueve o no salgo de casa", **no equivale a** "no llueve y salgo de casa".
- Por ($\mathbf{(DM)}_2$) "llueve y no salgo de casa", **no equivale a** "no llueve o salgo de casa".

video 9

1.6. **Lógica de Predicados. Cuantificadores.** Una Lógica basada solo sobre las proposiciones (o enunciados) no será suficiente para nuestros objetivos, tanto teóricos como aplicados. Necesitamos desarrollar el concepto de **predicado**: *una proposición que contiene una o mas variables.* Para representar los predicados utilizaremos las mismas letras que para las proposiciones y para las variables letras latinas como $x, y, z, \ldots$, o sea expresiones del tipo $p(x)$, la cual se lee "p de x". Por ejemplo:

- $p(x) =$ "x es un hombre",
- $q(y) =$ "y es una piedra"
- $r(z) =$ "z es un número natural mayor o igual que 5",
- $p(x, y) =$ "x es un hombre más alto que y",
- $r(y, z) =$ "$z \geq y$",

los tres primeros son predicados en una variable y los dos últimos en dos variables.

Algunos autores llaman a los predicados **esquemas proposicionales** o **funciones proposicionales**.

Cuando fijamos las variables en un cierto elemento, los predicados se convierten en proposiciones, las cuales al ser proposiciones pueden ser verdaderas o falsas dependiendo del elemento colocado en lugar de la variable. Por ejemplo:

- $p(Juan) =$ es una proposición verdadera, si efectivamente Juan es un hombre.
- $q(Chicho) =$ es una proposición falsa, si Chicho es un perro.
- $r(\pi) =$ es una proposición falsa (π número real no natural y menor que 5),
- $p(Juan, Pedro)$ es una proposición,
- $r(1, 5)$ es una proposición verdadera.

Aplicando a los predicados los conectivos lógicos, se pueden construir nuevos predicados con un número de variables no necesariamente coincidente con el de los predicados originales.

video 10

Otro modo de construir nuevos predicados es mediante los llamados **cuantificadores**.

El cuantificador universal: se simboliza con "$\forall$"y significa "*para cada*"o "*para todo*".

Por ejemplo:

"$\forall x : p(x)$"significa "para cada elección de x, $p(x)$ es verdadera".

El cuantificador existencial: se simboliza con "$\exists$"y significa *existe al menos uno*".

Por ejemplo:

"$\exists x : p(x)$"significa "existe al menos una elección de x para la cual $p(x)$ es verdadera".

En los predicados con mas variables, también se pueden utilizar varios cuantificadores. En tal caso se debe prestar mucha atención al orden de los mismos, ya que si se modifica el orden podría cambiar el significado de las proposiciones resultantes.

Ejemplo 1.10. Consideremos el predicado en dos variables

$$p(x, y) = \text{“un hombre } x \text{ observa el planeta } y\text{”}$$

y veamos los siguientes enunciados:

$\exists x : p(x, y)$ significa: "existe al menos un hombre que observa el planeta y"

$\forall x : p(x, \bar{y})$ significa: "todos los hombres observan el planeta $\bar{y}$"

$\forall y, \exists x : p(x, y)$ significa: "cada planeta tiene al menos un hombre que lo observa"

$\exists x, \forall y : p(x, y)$ significa: "al menos un hombre mira todos los planetas"

$\exists y, \forall x : p(x, y)$ significa: "al menos un planeta es mirado por todos los hombres"

$\forall x, \exists y : p(x, y)$ significa: "..."[3]

Las variables que en un predicado no son cuantificadas (o sea, que no son afectadas por un cuantificador) se dicen **libres**. En el primer item del ejemplo precedente la variable y es *libre*. En los restantes las variables x e y son ambas cuantificadas, o sea los predicados no dependen de estas variables, por esto se las llama **mudas**.

El valor de verdad de un predicado depende de sus variables libres. Por lo tanto, si un predicado no tiene variables libres, es un enunciado (proposición).

video 11

¿Cómo se comporta la negación con respecto a los cuantificadores $\exists$ y $\forall$?

Por ejemplo: ¿Qué significa: $\sim$"Todas las plantas son verdes"?

Esta negación la podemos escribir como: "Existe al menos una planta que no es verde"

Formalicemos esto introduciendo predicados y cuantificadores:

- $p(x) =$ "x es una planta"
- $q(x) =$ "x es verde"

[3]Rta: Todo hombre mira al menos un platena.

La proposición "Todas las plantas son verdes"se escribe como

$$\forall x : p(x) \Rightarrow q(x).$$

Luego, su negación, "Existe al menos una planta que no es verde", se escribe como:

$$\exists x : p(x) \wedge \sim q(x),$$

o equivalentemente por (**(DM)**$_1$), como:

$$\exists x : \sim (\sim p(x) \vee q(x)),$$

la cual todavía es equivalente a

$$\exists x : \sim (p(x) \Rightarrow q(x)).$$

Notemos que, generalizando, lo que hemos hecho es mostrar que si $a(x)$ es un predicado, vale la siguiente proposición: (*negación de un cuantificador universal*)

$$\text{“} \sim [\forall x : a(x)] \Leftrightarrow [\exists x : \sim a(x)]\text{”}. \tag{1.6}$$

En el ejemplo precedente $a(x) = [p(x) \Rightarrow q(x)]$.

En modo análogo se puede mostrar que: (*negación de un cuantificador existencial*)

$$\text{“} \sim [\exists x : a(x)] \Leftrightarrow [\forall x : \sim a(x)]\text{”}. \tag{1.7}$$

Observamos que "$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$"y (1.6) resaltan la importancia de los construcción de contraejemplos para mostrar que un teorema sea falso.
Por ejemplo, si quisieramos mostrar la falsedad de un teorema del tipo:

$$\forall x : p(x) \Rightarrow q(x),$$

o sea que

$$\sim [\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)]$$

es verdadera, bastaría con mostrar **un** x tal que $p(x)$ es verdad y $q(x)$ es falsa.

Supongamos que afirmo que, en el ambiente de los números racionales, $\forall t : t > 0 \Rightarrow t^2 > t$. Para mostrar que es falsa me basta con mostrar un número racional tal que esto no se verifique, por ejemplo $t = \frac{1}{2}$.

Las últimas observaciones nos llevan a hacer un comentario con respecto al concepto de **razonamiento inductivo** del cual hablamos al principio de este curso, donde afirmamos que este tipo de razonamiento observa patrones de los cuales obtiene conclusiones. Por ejemplo, en nuestro ejemplo previo ejemplo: "Todas las plantas son verdes", un tipo de razonamiento inductivo podría haber analizado 10000 plantas, todas verdes, y concluir que efectivamente todas las plantas son verdes. Obviamente sabemos que esto es falso. Luego, haber analizado un cierto número de casos particulares **no** autoriza a sacar conclusiones generales. Sin embargo este tipo de razonamiento es una de la columnas de la ciencia moderna y en particular de las ciencias experimentales. Esto fue un gran rompecabezas para los filósofos, ya que era como que la ciencia moderna se estaba basando en argumentos no logicamente justificables. Pero si remiramos lo que escribimos cuando introdujimos el razonamiento inductivo, dijimos algo más: ....patrones de los cuales obtenemos conclusiones *con algún grado de probabilidad.* Efectivamente, mediante la lógica y las probabilidades, se da origen a la llamada Estadistica Inductiva, la cual podriamos sintetizarla como *el estudio de métodos que sirven a aprender de la experiencia y, en particular, a obtener leyes generales partiendo de la observación, mas o menos programada de casos particulares.*

Obviamente no es este curso, sumamente introductorio, la sede para abordar este último tema, pero es importante hacer un cierre coherente donde se intuisca la centralidad de los dos tipos de razonamiento de los cuales nos hemos ocupado.

Los argumentos expuestos en la presente sección podrían parecer a algún estudiante como complicaciones inútiles de reglas tan simples que podrían considerarse obvias. Quizás?. Pero la experiencia nos ha mostrado las multiples ocasiones en que estudiantes, incluso muy preparados, han cometido errores de lógica durante una demostración, no han sabido formular correctamente la negación de un enunciado, etc. Por eso consideramos que no es niguna perdida de tiempo el ejercicio en los argumentos precedentemente expuestos.

Ejercicios.

(1) Sean:

p : "Emilio tiene fiebre."

q : "Emilio tiene miedo del exámen"

r : "Emilio va a la escuela".

Interpretar los enunciados:

a)"$p \vee q \Rightarrow\sim r$ "

b)"$\sim p \wedge \sim r \Rightarrow q$ ".

(2) Verificar si los siguientes enunciados son tautologías

a) "$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$"

b) "$(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow\sim q)$"

c) "$p \wedge \sim (p \vee q)$"

(3) Verificar, en base al Modus-Ponens, si las siguientes deducciones son correctas.

a) Si hoy llueve salgo en coche; hoy no llueve; entonces no salgo en coche.

b) Si hoy llueve salgo en coche; no salgo en coche; entonces hoy no llueve.

(4) De "$p \Rightarrow q$"se deduce q ya que el enunciado "$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ "es una tautología. Generalizando, si puede deducir q de los enunciados $p_1, p_2, \ldots, p_n$ si el enunciado "$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q$"es una tautología.

Analizar ahora la siguiente argumentación: Si Pipo miente entonces es el asesino, o si no, el delito ocurrió después de medianoche. Si el delito ocurrió antes de medianoche entonces Pipo miente. Entonces Pipo es el asesino.

¿Es correcta esta deducción?

(5) Consideremos un circuito eléctrico en el que hay solo dos interruptores on-off: cerrado (pasa corriente) y abierto (no pasa corriente). A cada interruptor asociamos un enunciado con la convención que el interruptor está cerrado si y sólo si el enunciado es verdadero. De este modo en el circuito (a) de la Figura 1, el pasaje de corriente equivale a la verdad de "$p \wedge q$".

Expresar la condición de pasaje de corriente para los circuitos (b) de la Figura 1.

(6) Costruir un circuito del tipo indicato en el ejercicio (5) para los enunciados:

a) $p \wedge (r \vee \sim q)$,

b) $p \Rightarrow q$.

(7) Sean x e y núumeros naturales y $p(x, y) =$ "$x < y$". Interpretar

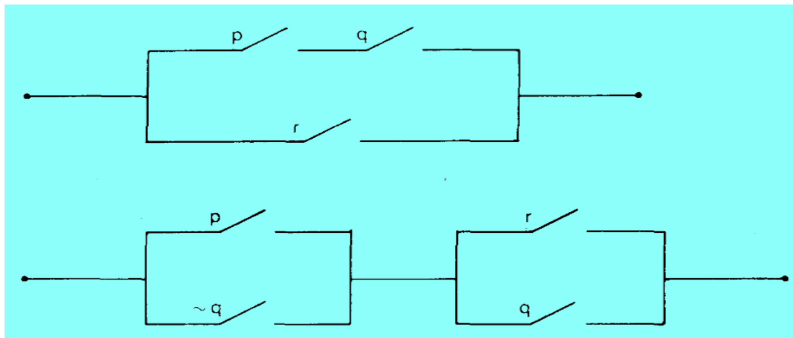
a) $\exists x \forall y : p(x, y)$

b) $\exists x \exists y : p(x, y)$

c) $\forall x \forall y : p(x, y)$

d) $\forall x \exists y : p(x, y)$

(b)



(c)

Figura 1.

(8) Sean: $p(x) =$ "x es chino"y $q(x) =$ "x es un buen cocinero". Interpretar los enunciados:

a) "$\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)$"

b) "$\forall x : q(x) \Rightarrow p(x)$"

y sus negaciones.

(9) Consideremos el siguiente enunciado del tipo "$p \Rightarrow q$": "si todos los hombres fuesen sanos, todos los hospitales estarían vacios". Escribir la contrareciproca, la contraria y la inversa.

(10) Proporcionar una conclusión válida para las siguientes premisas:

- Los bebés son ilógicos.
- Nadie desprecia a quien puede domar un cocodrilo.
- Las personas ilógicas son despreciadas.

(Sugerencia: escribir las premisas en forma "$p \Rightarrow q$".)

(11) $*$ Considerar el siguiente enuciado: “soy falso”. ¿Que podría decir: este enunciado es falso o verdadero?

video 12

2. Introducción a la Teoría de Conjuntos

Frases como: el conjunto de los números naturales, el conjunto de ciudadanos argentinos, el conjunto de puntos del plano, etc. son intuitivas e ilustran el concepto de **conjunto**. Asumiremos como primitiva la noción de conjunto (o sea, no reducible a conceptos mas elementares). Algunas veces utilizaremos sinónimos de esta palabra, como: colección, clase, familia, agregado. Denotaremos los conjuntos con letras mayúsculas $A, B, X, \ldots$ y con letras minúsculas $a, b, x, \ldots$ los elementos de estos conjuntos. A veces elencaremos explicitamente los elementos de un conjunto colocandolos entre llaves. Por ejemplos:

- $\{0, 1\}$ es el conujunto formado por los números 0 y 1;
- $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{50}\right\}$ indica el conjunto de los números recíprocos de los números naturales entre 1 y 50;
- $\{a\}$ indica el conjunto formado solo por la letra a.

Además de los símbolos lógicos que introdujimos en la sección precedente, encontramos los símbolos de **igualdad** $=$ y de **pertenencia** $\in$. Estos dan lugar a los siguientes predicados en dos variables

- $x = y$ que se lee "*x es igual a y*".
- $x \in X$ que se lee "*x pertenece a X*"o "*x es elemento de X*".

La **igualdad** tiene las siguientes propiedades:

reflexiva: $\forall x : x = x$

simétrica: $\forall x, \forall y : (x = y) \Longleftrightarrow (y = x)$

transitiva: $\forall x, \forall y, \forall z : (x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$

y la siguiente **propiedad de sustitución**: si p es un *predicado cualquiera* en una variable, entonces

- $\forall x, \forall y : (x = y) \Rightarrow (p(x) \Leftrightarrow p(y))$

es decir, que si x e y son iguales, entonces son intercambiables en cualquier predicado. La negación de los dos predicados que acabamos de introducir se denota en el siguiente modo:

- $x \neq y$ que se lee "*x es distinto de y*".
- $x \notin X$ que se lee "*x no pertenece a X*"o "*x no es elemento de X*".

Frecuentemente utilizaremos la notación ":="en lugar de definición, por ejemplo:

- $A := \{1, 2, 3\}$ significa que A es el conjunto $\{1, 2, 3\}$.
- $\emptyset := \{x$ tales que $x \neq x\}$, o sea el llamado **conjunto vacío** es decir el **conjunto sin elementos**. Notemos que así definido, este conjunto **no** tiene elementos porque cualquier x que verificase el predicado $x \neq x$ estaría verificando una contradicción.

Introducimos ahora los símbolos de **inclusión**: $\subseteq, \supseteq, \subset, \supset$, que dan lugar a predicados en dos variables. Previamente, diremos que dos conjuntos A y B son **iguales** si y sólo si tienen los mismos elementos, o sea:

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Se dice que B es un **subconjunto** de A (o equivalentemente que A **contiene** a B) y se escribe $B \subseteq A$ (o $A \supseteq B$) si todo elemento de B es un elemento de A, simbólicamente:

$$\forall x : x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Notemos que $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Por otro lado, siempre $\emptyset \subseteq A$, es decir:

$$\forall x : x \in \emptyset \Rightarrow x \in A,$$

en efecto esto es cierto porque el antecedente de la implicación siempre es falso, y por lo tanto la implicación es verdadera.

Si $A \subseteq B$ pero existe al menos un elemento de B que no está en A diremos que A está **estrictamente incluido** en B y lo escribiremos $A \subset B$ o $B \supset A$.

Por ejemplo: si A es el conjunto de los números naturales pares y $\mathbb{N}$ es el conjunto de todos los números naturales, entonces $A \subseteq \mathbb{N}$, pero es mas preciso indicar que $A \subset \mathbb{N}$. Esta es una situación similar a la que se nos presentó al hablar del ejemplo del $\leq$ en la sección de lógica.

La relación de inclusión posee las siguientes propiedades:

reflexiva: $\forall A : A \subseteq A$

antisimétrica: $\forall A, \forall B : (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$

transitiva: $\forall A, \forall B, \forall C : (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

video 13

Veamos ahora algunas de las operaciones fundamentales de la Teoría de Conjuntos, las cuales están representadas gráficamente en los llamados diagramas de Euler [4] -Venn [5] . Sean A y B dos conjuntos.

Definición 2.1. La **unión** de A y B es el conjunto de elementos que pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos y la representaremos con $A \cup B$.

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

[4]Leonhard Euler (1707 - 1783), fue un matemático y físico suizo del siglo XVIII. Fue uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos

[5]John Venn 12 (Drypool, 1834 - Cambridge, 1923), fue un matemático y lógico británico . Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones y silogismos conocido como los diagramas de Venn.

Definición 2.2. La **intersección** de A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a ambos conjuntos y la representaremos con $A \cap B$.

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definición 2.3. La **diferencia** de A respecto a B es el conjunto de elementos que pertenecen a A y **no** pertenecen a B.

$$A \backslash B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Definición 2.4. La **diferencia simétrica** entre A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A y **no** pertenecen a B o que pertenece a B y **no** a A.

$$A \triangle B := \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

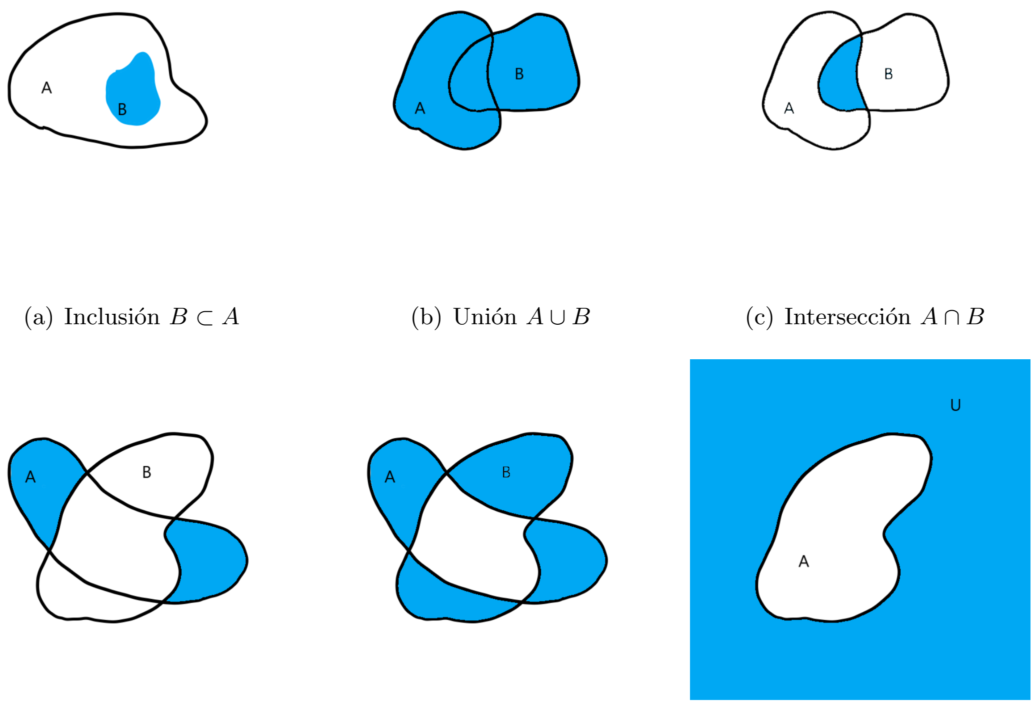
Definición 2.5. El **complemento** de A respecto a un universo U es el conjunto de elementos que pertenecen a U y **no** pertenecen a A.

$$C_U A := U \backslash A.$$

Por ejemplo el complemento de los números pares respecto al universo de los números naturales, es el conjunto de los números impares. Pero si cambiamos el universo, el complemento puede cambiar.

Definición 2.6. Dado un conjunto A, se llama **partes de** A al conjunto de todos los subconjuntos de A y se denota $\mathcal{P}(A)$. Cabe aclarar que $\emptyset$ y A pertenecen a $\mathcal{P}(A)$.

Considerado un universo U, sean $A, B, C, \dots$ elementos de $\mathcal{P}(U)$, es decir subconjuntos de U. Valen las siguientes propiedades de las operaciones entre conjuntos:



(a) Inclusión $B \subset A$ (b) Unión $A \cup B$ (c) Intersección $A \cap B$

(d) Diferencia $A \backslash B$ (e) Diferencia Simétrica $A \triangle B$ (f) Complementación

$C_U A = U \backslash A$

FIGURA 2. Diagramas de Euler-Venn de las Operaciones con Conjuntos

Para la unión	Propiedad	Para la intersección
$A \cup A = A$	idempotencia	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	conmutativa	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	asociativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (A \cap B) = A$	absorción	$A \cap (A \cup B) = A$
$A \subseteq B \iff (A \cup B = B)$	inclusión	$A \supseteq B \iff (A \cap B = B)$

Para la complemetación	Propiedad
$C(CA) = A$	involutiva
$C(A \cup B) = CA \cap CB$	ley de De Morgan - cfr. (**(DM)**$_1$)
$C(A \cap B) = CA \cup CB$	ley de De Morgan - cfr.(**(DM)**$_2$)
$A \cup CA = U, A \cap CA = \emptyset$	

Ejercicios.

(1) Sea A un conjunto y sea $a \in A$. ¿Es verdad que $A \cup \{a\} = A$? ¿Es verdad que $A \cup \{\{a\}\} = A$?

(2) Sean A, B, C partes de un dado universo U. Analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) $A \subseteq C$ y $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$

b) $A \subseteq C$ y $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \cap C$

c) $A \subseteq B \Longrightarrow CA \subseteq CB$.

(3) Mostrar que

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (B \backslash A) \cup (A \backslash B)$$

(4) Demostrar las leyes de De Morgan

$$C(A \cup B) = CA \cap CB$$
$$C(A \cap B) = CA \cup CB$$

(5) $*$ Sea B el conjunto de los barberos de Ushuaia que cortan la barba solo y sólo a aquellos que no se la cortan solos.

Mostrar que o $B = \emptyset$, o los barberos que pertenecen a B tienen barbas kilométricas.

(6) Analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) $A \supset B$ y $C \cap A \neq \emptyset \Rightarrow C \cap B = \emptyset$

b) $A \supset B \cap C$ y $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \cap C = \emptyset$

c) $(A \cap B) \backslash C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$

Referencias

[1] I. M. Copi, *Introducción a la lógica*, Eudeba, Buenos Aires, (1994)

[2] I. M. Copi & C. Cohen, *Introducción a la lógica*, 2ed, Limusa, México (2013).

[3] L. T. Gamut, *Introducción a la lógica*, Eudeba, Buenos Aires, (2002).

[4] C. D. Miller, V. E. Heeren, J. Hornsby & C. Heeren, *Mathematical Ideas*, 13th ed., Pearson (2015).

[5] C. D. Miller, J. Hornsby & V. E. Heeren, *Matemática, Razonamiento y Aplicaciones*, 12th ed., Pearson (2013).

[6] C. D. Pagani & S. Salsa, *Analisi Matematica* Vol I, Masson, Milano, (1995).

[7] A. Paenza, *El placer de tener un problema no resuelto en la cabeza*.

[8] A. Paenza, *Grandes temas de la matemática. Capítulo 9: Lógica y paradojas*.

[9] G. Prodi, *Metodi Matematici e Statistici*, McGraw Hill, Milano, (1992)